Probabilités
L2 2024 – 2025

TD4 – loi géométrique et loi de Poisson

Exercice 1. On lance plusieurs fois de suite un dé cubique équilibré, les lancers étant indépendants.

1. Calculer la probabilité que le premier 4 soit obtenu au 3^{e} lancer.
2. En moyenne, au bout de combien de lancers obtient-on le premier 4 ?

Exercice 2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On note $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Calculer $P(X_1 > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $P(Y > k)$ en fonction de $P(X_1 > k)$.
3. En déduire la loi de Y.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit la loi de X est sans mémoire si :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$

1. Montrer que la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ est sans mémoire.
2. Réciproquement, on veut montrer que si la loi de X est sans mémoire sur $\mathbb{N}^*$, alors X suit une loi géométrique. On note $u_n = P(X > n)$.
   - **a.** Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = u_n \times u_k$.
   - **b.** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, en précisant sa raison q et son terme initial u_0.
   - **c.** En déduire que X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p = 1 - q$.

Exercice 4 (loi des évènements rares)**.**

1. Soit X_n une variables aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ avec $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ lorsque $n \to +\infty$, où $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit Y de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(Y = k).$$

   Remarque : on dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Y.

2. Une machine usine des pièces. Chaque pièce a 0,5 % de chance d'être défectueuse, indépendamment des autres. On note X le nombre de pièce défectueuses dans un lot de 500 pièces.
   - **a.** Quelle est la loi exacte de X ?
   - **b.** Par quelle loi peut-on l'approcher ? On utilisera cette loi dans la question suivante.
   - **c.** Calculer $P(X \geq 3)$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle moment factoriel d'ordre $r \in \mathbb{N}$ la quantité $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$, à condition que cette dernière soit finie.

1. Calculer les moments factoriels de $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Mêmes questions si $X \sim \mathscr{G}(p)$, $p \in]0, 1]$.
   Indication : exprimer les moments factoriels en fonction des dérivées d'une série entière.

Exercice 6. Un insecte pond des œufs. On suppose que le nombre N d'œufs pondus suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf pondu a une probabilité p d'éclore, indépendamment des autres œufs, et indépendamment de N. On note X le nombre d'œufs qui ont éclos.

1. Conditionnellement à l'évènement $\{N = n\}$, quelle est la loi de X ? En déduire $P(X = k \mid N = n)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi de X.
3. Quelle est l'espérance et la variance de X ?

Exercice 7*. On considère une expériences de Bernoulli de probabilité de succès $p \in]0,1]$ et on note $q = 1 - p$ la probabilité d'un échec. On répète indépendamment l'expérience jusqu'à obtenir n succès et on note X le nombre d'échecs obtenus avant le n-ième succès. La loi de X est appelée *loi binomiale négative* de paramètres n et p, notée $\mathrm{BN}(n, p)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$.
   Indication : si X = k, combien y a-t-il eu d'expériences ? de succès ? d'échecs ?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle coefficient binomiale généralisé le nombre $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k.$$
3. Notons T_k le nombre d'échecs entre le $(k-1)$-ième et le k-ième succès. Quelle la loi de T_k ?
4. Exprimer X en fonction des variables $(T_k)_{k\geq 1}$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 8*. Une marque place dans chacun de ses paquets de céréales une vignette à collectionner. Il existe n vignettes distinctes, et chaque paquet contient l'une d'elles au hasard (uniforme). On se demande combien de paquet il faut ouvrir en moyenne pour obtenir toutes les vignettes. On note X_n le nombre de paquets ouverts jusqu'à obtenir toutes les vignettes, on note $T_1 = 1$, et pour $k \in [\![2, n]\!]$ on note T_k le nombre de paquets ouverts pour obtenir k vignettes différentes après avoir obtenu $k - 1$ vignettes différentes.

1. Quelle est la loi de T_k ?
2. Exprimer X_n en fonction des $(T_k)_{1\leq k\leq n}$.
3. En déduire l'espérance de X_n et en donnant un équivalent lorsque $n \to +\infty$.
4. On admet que les $(T_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes. Calculer la variance de X_n et montrer que :
$$\mathrm{Var}(X_n) \leq C\,n^2,$$
   avec $C > 0$ une constante.