Probabilités
L2 2024 – 2025

TD1 – Dénombrement et espaces de probabilité finis

Exercice 1. Combien de nombres distincts à 4 chiffres peut-on former en utilisant les chiffres 2, 4, 5, 7, 8 ? Même question avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4.

Exercice 2. Vos amis vous ont offert 10 livres pour votre anniversaire.

1. Vous souhaitez les disposer sur une étagère de votre bibliothèque. Celle-ci peut accueillir 8 livres. De combien de façons pouvez-vous les ranger ?
2. Vous décidez d'emporter 3 livres dans vos bagages pour les vacances. Combien de possibilités avez-vous ?

Exercice 3. Un groupe de n amis ($n \geq 2$) décident de trinquer au nouvel an. Si chacun trinque une fois avec tous les autres, combien de tintements de verres y a-t-il eu ?

Exercice 4. Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de façon de choisir 3 cartes qui soient :

1. des as ?
2. de même hauteur ?
3. des cœurs ?
4. de hauteurs deux à deux différentes ?

Exercice 5. À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis, qui contiennent autant de filles que de garçons.

Exercice 6.

1. Combien le mot MATHS a-t-il d'anagrammes ? Et le mot ANAGRAMME ?
2. Dénombrer le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres constitué de k lettres distinctes, où la i-ième lettre se répète p_i fois.

Exercice 7.

1. Combien y a-t-il d'applications injectives de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,m\}$?
2. Combien y a-t-il d'application strictement croissante de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,m\}$?
3. Combien y a-t-il d'application surjective de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}$?

Exercice 8. Sur un quadrillage $\{0,\dots,n\}^2$, on s'intéresse aux chemins allant de $(0,0)$ à (n,n) tels qu'à chaque étape, le chemin se déplace d'une unité vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de tels chemins ?
2. Combien y a-t-il de tels chemins passant par le point $(k, n-k)$, où $k \in [\![0,n]\!]$?
3. En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 9. Soit P une probabilité sur un univers Ω fini non vide. Soient A, B et C trois évènements. On suppose que $P(A) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}2$, $P(B \cap C) = 0{,}1$, $P(A \cap C) = 0{,}1$ et $P(A \cap B \cap C) = 0{,}05$.

1. Calculer la probabilité des évènements $E_1 = A \cup (B \cap C)$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$.
2. Si de plus $P(B) = 0{,}4$, calculer la probabilité que ni A ni B ne se réalisent.

Exercice 10. On lance 4 dés cubiques équilibrés.

1. Décrire un espace de probabilité associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité que les 4 dés aient le même résultat.
3. Calculer la probabilité que les résultats des dés soient deux à deux distincts.

Exercice 11. Lors d'une loterie, 300 billets sont vendus aux enfants d'une école. Quatre billets sont gagnants. Si on achète 10 billets, quelle est la probabilité de gagner au moins un lot ? On répondra en proposant un espace de probabilité et un évènement décrivant la situation.

Exercice 12. Une urne contient n_1 boules rouges et n_2 boules blanches, les boules étant indiscernables. On tire au hasard et sans remise k_1+k_2 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir k_1 boules rouges et k_2 boules blanches.

Exercice 13. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n boules de l'urne ($1 \leq n \leq N$).

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ de sorte que P soit la probabilité uniforme. Quel est le cardinal de Ω ?
2. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges (avec $M < N$) et celles de $M+1$ à N sont blanche. Notons A_k l'évènement « la k-ième boule est rouge ».
   - **a.** Calculer $P(A_k)$.
   - **b.** Calculer $P(A_k \cap A_\ell)$.

Exercice 14. Dans un trousseau de n clés, seule une des clés ouvre une certaine porte. En choisissant les clés au hasard une après l'autre, quelle est la probabilité de réussir à ouvrir la porte au k-ième essai ?

Exercice 15.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois six en n lancers de dés ? Trouver la valeur minimale de n pour que cette probabilité soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
2. Si on lance n fois deux dés, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un double six ? Trouver la valeur minimale de n telle que cette probabilité soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 16.

1. Soit $E = \{1, \ldots, n\}$. On appelle *dérangement* de E une permutation de E sans point fixe (c.-à-d. une bijection $\sigma \colon E \to E$ telle que $\forall i \in E$, $\sigma(i) \neq i$). On note d_n le nombre de dérangements de E.
   - **a.** Rappeler la formule du crible (ou formule de Poincaré).
   - **b.** Pour tout $i \in E$, on note A_i l'ensemble des permutations σ de E telles que $\sigma(i) = i$. Écrire l'ensemble des dérangements de E en fonctions des A_i.
   - **c.** Montrer que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
2. À une soirée, n invités ont déposé leur parapluie dans l'entrée. En repartant, les invités un peu distraits emportent un parapluie au hasard.
   - **a.** Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. On le choisira de sorte que P soit uniforme.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'aucun invité ne reparte avec son parapluie.
   - **c.** Montrer que la probabilité qu'exactement r invités repartent avec leur parapluie est $\frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 17. Une caisse contient dix paires distinctes de chaussures. On tire au hasard 4 chaussures et on cherche à calculer la probabilité pour qu'il y ait une paire (au moins) parmi les 4 chaussures.

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, de sorte que P soit uniforme.
2. Notons A_i l'évènement « la i-ième paire est présente dans les chaussures tirées ». Calculer $P(A_i)$.
3. Calculer $P(A_{i_1} \cap A_{i_2})$ pour $i_1 \neq i_2$, puis calculer $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ pour $i_1, \ldots, i_k$ distincts avec $k \geq 3$.
4. En déduire la probabilité que parmi les 4 chaussures tirées, il y ait une paire.

Exercice 18. Soit $S_{n,m}$ l'ensemble des surjections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$.
Si $j \in \{1, \ldots, m\}$, on note A_j l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$ pour lesquelles j n'a pas d'antécédent.

1. Exprimer $S_{n,m}$ en fonction des A_j.
2. Calculer $\mathrm{Card}(A_j)$.
3. Soit $k \in \{1, \ldots, m\}$. Montrer que pour tous $j_1, \ldots, j_k$ distincts, $\mathrm{Card}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = (m-k)^n$.
4. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathrm{Card}(S_{n,m}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n.$$