Probabilités
L2 2024 – 2025

TD 1.5 – Dénombrement et coefficients binomiaux

Exercice 1. On dispose de 10 livres à ranger sur une étagère. Parmi ceux-ci, 5 sont des livres de mathématiques, 3 des livres de physique et 2 des livres d'informatique.

1. De combien de façon peut-on disposer les livres ?
2. Combien y a-t-il de dispositions si les livres traitant d'un même sujet doivent rester groupés ?

Exercice 2. On considère un cadenas à 5 roues comportant chacune les chiffres de 0 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes comportant exactement 3 fois le chiffres 8 ?
3. Combien y a-t-il de combinaisons contenant au moins une fois le chiffre 8 ?

Exercice 3. Parmi 11 amis proches, vous souhaiter en inviter 5 à diner.

1. Combien de groupes différents d'amis pouvez-vous inviter ?
2. Combien y a-t-il de possibilités si deux d'entre eux sont en couple et ne peuvent venir qu'ensemble ?
3. Combien y a-t-il de possibilités si deux d'entre eux se détestent et ne peuvent pas venir ensemble ?

Exercice 4. Un gang de 5 voleurs a dérobé 3 diamants. Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre de partages possibles du butin.

1. Les diamants sont différents et attribués à 3 voleurs différents.
2. Les diamants sont différents et chaque voleur peut en recevoir plusieurs (ou zéro).
3. Les diamants sont identiques et attribués à 3 voleurs différents.
4. Les diamants sont identiques et chaque voleur peut en recevoir plusieurs (ou zéro).

Exercice 5. Lors d'une partie de bridge, on distribue l'intégralité d'un jeu de 52 cartes à 4 joueurs. Combien y a-t-il de donnes possibles ?

Exercice 6. On considère un jeu de 52 cartes. Compter le nombre de mains de 5 cartes qui sont :

1. une quinte flush.
2. un carré.
3. un full.
4. une couleur.
5. une suite.
6. un brelan.
7. une double paire.
8. une paire.
9. une carte simple.

Attention : une couleur ne doit pas être une quinte flush, un brelan ne doit pas être un carré, etc.

Exercice 7. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$.

1. Montrer que $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.
2. En déduire que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 8. Soit E un ensemble à n éléments.

1. Rappeler le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.
2. Rappeler le cardinal de $\mathscr{P}_k(E)$, l'ensemble des parties de E à k éléments.
3. Montrer que le cardinal de $\left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2 \,\middle|\, A \subset B\right\}$ est 3^n.
Indication : pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pourra dénombrer les $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$ et $\#B = k$.

Exercice 9. À l'aide de la fonction $f\colon x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

3. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 10. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$.

1. Montrer que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

2. En déduire que $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$.

3*. Donner une interprétation combinatoire des identités précédentes.
Indication : on pourra dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties A et B d'un ensemble à n éléments, telles que $A \subset B$, $\#A = k$ et $\#B = p$.

Exercice 11. Soit $\mathrm{j} := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

2. Développer $(1+1)^n$, $(1+\mathrm{j})^n$ et $(1+\mathrm{j}^2)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

3. Calculer une forme exponentielle de $1+\mathrm{j}$ et de $1+\mathrm{j}^2$.

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{3k} = \frac{8^n + 2\,(-1)^n}{3}.$$

Exercice 12*. Soit p un nombre premier.

1. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.

2. En déduire que :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad (a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

Exercice 13*. Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$ et 0 sinon. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré $n-1$ à coefficients réels. Soit f l'endomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1). \end{array}$$

1. Montrer que f est un automorphisme et donner son inverse f^{-1}.

2. Montrer que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. Déduire des questions précédentes que A est inversible et expliciter son inverse A^{-1}.

4. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : pour tous $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ y_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x_i \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i.$$

5. Application : dénombrement du nombre $s_{m,n}$ de surjections de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, où $m \geq n$.

- **a.** Dénombrer le nombre d'applications de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
- **b.** Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, dénombrer le nombre d'applications de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ dont exactement k éléments dans l'ensemble d'arrivée ont au moins un antécédent. On exprimera le résultat en fonction de $s_{m,k}$.
- **c.** En déduire que $n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{m,k}$.
- **d.** Calculer $s_{m,n}$ à l'aide de la formule d'inversion de Pascal.