Probabilités
L2 M/MI/MP
2025 – 2026

Devoir surveillé n° 3
11 décembre 2025

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure (tiers temps : 1 heure 20 minutes).

Barème : 10 points (répartition indicative).

Exercice 1 (4,5 pts)**.** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1;1\} \times \{0;1;2\}$ tel que :

$$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbb{P}(X=1, Y=2) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(X=-1, Y=0) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(X=-1, Y=1) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbb{P}(X=-1, Y=2) = \frac{1}{8},$$

avec la notation $\mathbb{P}(X=x, Y=y) := \mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big)$.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
5. En déduire $\mathrm{Var}(Y - X)$.

Exercice 2 (5,5 pts)**.** Soit $n \geq 2$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrées et réduites, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{E}[X_i] = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_i) = 1.$$

On suppose que pour tout $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = r$ avec $r \in [-1, 1]$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$.
2. Montrer que $\mathrm{Var}(S_n) = n + n(n-1)r$.
3. En déduire que $r \geq -\frac{1}{n-1}$.
4. Donner une condition nécessaire sur r pour que les variables soient indépendantes.
5. On suppose que $r > -\frac{1}{n-1}$. Montrer que :

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq t\right) \leq \frac{1-r}{nt^2} + \frac{r}{t^2}.$$

6. Si $r = -\frac{1}{n-1}$, montrer que la probabilité que $X_1, \ldots, X_n$ soient linéairement dépendantes est égale à 1.