Devoir surveillé n° 1
Correction

Exercice 1 (2 pts)**.**

1. On peut assimiler l'expérience aléatoire à une succession de 10 tirages sans remises, donc X suit la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(10, r, 30-r)$.
2. Puisque $X \sim \mathscr{H}(10, r, 30-r)$, son espérance est $\mathbb{E}[X] = 10 \times \frac{r}{30} = \frac{r}{3}$. Par conséquent, si $\mathbb{E}[X] = 6$ alors $r = 18$. Il y a 18 boules rouges dans l'urne.

Exercice 2 (3 pts)**.**

1. D'après les hypothèses de l'énoncé, conditionnellement à l'évènement A, la variable X suit la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$:
$$\forall k \in [\![1,6]\!], \quad P(X = k \mid A) = \frac{1}{6},$$
et conditionnellement à A^{c}, elle suit la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$:
$$\forall k \in [\![1,4]\!], \quad P(X = k \mid A^{\mathrm{c}}) = \frac{1}{4}.$$
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{A, A^{\mathrm{c}}\}$, on a :
$$\forall k \in [\![1,6]\!], \quad P(X = k) = P(X = k \mid A)\,P(A) + P(X = k \mid A^{\mathrm{c}})\,P(A^{\mathrm{c}}) = \begin{cases} \frac{p}{6} + \frac{1-p}{4} & \text{si } k \in \{1,2,3,4\}, \\ \frac{p}{6} & \text{si } k \in \{5,6\}. \end{cases}$$
2. Par la formule de transfert :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k\,P(X = k) &= \sum_{k=1}^{4} k\left(\frac{p}{6} + \frac{1-p}{4}\right) + \sum_{k=5}^{6} k\,\frac{p}{6} \\ &= \frac{p}{6}\sum_{k=1}^{6} k + \frac{1-p}{4}\sum_{k=1}^{4} k \\ &= \frac{p}{6} \times 21 + \frac{1-p}{4} \times 10 \\ &= \frac{7p}{2} + \frac{5(1-p)}{2} \\ &= p + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
Par conséquent, $\mathbb{E}[X] = \frac{13}{4}$ si et seulement si $p = \frac{3}{4}$.

Exercice 3 (2 pts)**.**

1. Par définition des probabilités conditionnelles :
$$P(A \mid B \cap C) \times P(B \mid C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \times \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B \mid C).$$

2. On rappelle la formule $P(B \cap A^c) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. On a :

$$\begin{aligned}
P(B \mid A) = P(B \mid A^c) &\iff \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} \\
&\iff P(A^c)\,P(B \cap A) = P(A)\,P(B \cap A^c) \\
&\iff P(A^c)\,P(B \cap A) = P(A)\big[P(B) - P(A \cap B)\big] \\
&\iff P(A^c)\,P(B \cap A) = P(A)\,P(B) - P(A)\,P(A \cap B) \\
&\iff \big[P(A^c) + P(A)\big]\,P(B \cap A) = P(A)\,P(B) \\
&\iff P(B \cap A) = P(A)\,P(B) \\
&\iff A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (3 pts)**.**

1. Calculons la variance de X :

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda - \lambda^2.$$

Or une variance est toujours positive, donc $\lambda - \lambda^2 \geq 0$, c'est-à-dire $\lambda \in [0,1]$.

2. Développons $\operatorname{Var}(X+Y)$:

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Var}(Y).$$

En isolant $\operatorname{Cov}(X,Y)$, on obtient :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{Var}(X+Y) - \operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y)\big] = \frac{1}{2}\big(2\lambda^2 - 1\big).$$

3. Pour que X et Y soient indépendantes, il faut (mais il ne suffit pas !) que $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$, c'est-à-dire que $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Or, $\lambda \in [0,1]$ d'après la question 1, donc la valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est exclue. Ainsi, une condition nécessaire pour que X et Y soient indépendantes est $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.