CY TECH sciences et techniques

Probabilités
L2 2024 – 2025

Devoir surveillé n° 2
6 décembre 2024

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure (tiers temps : 1 heure 20 minutes).

Barème : 10 points.

Exercice 1 (2 pts)**.** On considère une urne contenant 30 boules de différentes couleurs. On note r le nombre de boules rouges. On tire simultanément au hasard 10 boules de l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. Si $\mathbb{E}[X] = 6$, combien y a-t-il de boules rouges dans l'urne ?

Exercice 2 (3 pts)**.** On considère une pièce dont la probabilité de tomber sur face est $p \in]0,1[$. Si la pièce tombe sur face, on lance un dé équilibré à 6 faces. Si la pièce tombe sur pile, on lance un dé équilibré à 4 faces. On note A l'évènement « la pièce tombe sur face », et on note X le résultat du dé lancé.

1. Déterminer la loi de X en fonction de p. *On justifiera les calculs avec soin.*
2. Déterminer la valeur de p pour que $\mathbb{E}[X] = \frac{13}{4}$.

Exercice 3 (2 pts)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité.

1. Démontrer que pour tous évènements A, B, C tels que $P(B \cap C) > 0$ et $P(C) > 0$, on a :
$$P(A \mid B \cap C) \times P(B \mid C) = P(A \cap B \mid C).$$
2. Soient A et B des évènements tels que $0 < P(A) < 1$. Montrer que $P(B \mid A) = P(B \mid A^c)$ si et seulement si A et B sont indépendants.

Exercice 4 (3 pts)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère X et Y des variables aléatoires telles que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] = \lambda$, $\mathrm{Var}(Y) = 1$ et $\mathrm{Var}(X+Y) = \lambda^2 + \lambda$.

1. Calculer $\mathrm{Var}(X)$ en fonction de λ et justifier que $\lambda \in [0,1]$.
2. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$ en fonction de λ.
3. Donner une condition **nécessaire** sur λ pour que X et Y soient indépendantes.