Probabilités
L2 2024 – 2025

Devoir surveillé n° 1
Correction

Exercice 1 (3,5 pts)**.**

1. On distingue deux cas :
   - Si le chiffre 7 est en première position, les 4 autres chiffres ont chacun 9 valeurs possibles, ce qui fait 9^4 nombres.
   - Si le chiffre 7 n'est pas en première position, il a 4 positions possibles ; le premier chiffre n'est ni 7 ni 0, il a donc 8 valeurs possibles ; et les 3 chiffres restants ont chacun 9 valeurs possibles ; ce qui fait un total de $4 \times 8 \times 9^3$ nombres.

   En tout, il y a $9^4 + (4 \times 8 \times 9^3) = 41 \times 9^3$ nombres à 5 chiffres qui contiennent une seule fois le chiffre 7.

   Solution de Mathis BUKALA.
   - Il y a 5×9^4 suites de 5 chiffres qui contiennent une fois le chiffres 7 (5 emplacement pour le 7, les 4 autres chiffres ont chacun 9 valeurs possibles).
   - Parmi ceux-ci, il y en a 4×9^3 qui commencent par 0 (le 1^er^ chiffre est fixé à 0, il y a 4 emplacements pour le 7, les trois chiffres restants ont chacun 9 valeurs possibles).

   Il y a donc $(5 \times 9^4) - (4 \times 9^3) = 41 \times 9^3$ nombres à 5 chiffres qui contiennent une seule fois le chiffre 7.

2. D'après le cours :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$
   De plus, on a la décomposition suivante de l'évènement A (loi de Morgan) :
$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$
   Les évènements $A \cap B$ et $A \cap B^c$ sont incompatibles (=disjoints), donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$. Par conséquent :
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$
   À retenir : $\boxed{P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$

3. **a.** D'après la formule du crible :
$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$
   b. On note A, E et I l'ensemble des élèves qui suivent respectivement anglais, espagnol et italien. En utilisant la formule du crible, on a :
$$\begin{aligned}\#(A \cap E \cap I) &= \#(A \cup E \cup I) - \#A - \#E - \#I + \#(A \cap E) + \#(A \cap I) + \#(E \cap I)\\ &= 280 - 200 - 140 - 77 + 100 + 31 + 28\\ &= 22.\end{aligned}$$
   Ainsi, 22 élèves suivent à la fois les cours d'anglais, d'espagnol et d'italien.

Exercice 2 (2 pts)**.**

1. Un groupe de k personnes est une combinaison sans remise de k éléments de l'ensemble de $n+p$ hommes et femmes. On peut donc former $\binom{n+p}{k}$ groupes de k personnes.

2. Comme précédemment, on peut former $\binom{n}{i}$ groupes de i hommes et $\binom{p}{j}$ groupes de j femmes, il y a donc $\binom{n}{i} \times \binom{p}{j}$ groupes formés de i hommes et j femmes.
3. Pour pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, notons E_i l'ensemble des groupes formés de i hommes et $k - i$ femmes. D'après la question 2, le cardinal de E_i est $\binom{n}{i} \times \binom{p}{k-i}$. Or, l'ensemble des groupes de k personnes est la réunion disjointe des E_i, donc d'après la question 1 :

$$\binom{n+p}{k} = \#\left(\bigcup_{i=0}^{n} E_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \#E_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i}.$$

Exercice 3 (3,5 pts)**.**

1. Le cardinal de Ω est $\binom{100}{3}$ *(cours).*
2. **a.** L'évènement A est l'ensemble des tirages dans lesquels les 3 sujets sont tirés parmi les 25 sujets révisés, la cardinal de A est donc $\binom{25}{3}$. Puisque P est uniforme, on a :

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{25}{3}}{\binom{100}{3}}.$$

   b. L'évènement B est l'ensemble des tirages dans lesquels 2 sujets sont tirés parmi les 25 sujets révisés et 1 sujet est tiré parmi les 75 autres sujets, la cardinal de B est donc $\binom{25}{2} \times 75$. Ainsi :

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{25}{2} \times 75}{\binom{100}{3}}.$$

   c. On considère l'évènement complémentaire C^c : « le candidat n'a révisé aucun des sujets tirés ». C'est l'ensemble des tirages dans lesquels les 3 sujets sont tirés parmi les 75 sujets non révisés. Ainsi :

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{\binom{75}{3}}{\binom{100}{3}}.$$

Exercice 4 (1 pt)**.** Le choix d'une partie ayant k éléments en communs avec F est déterminée par :

- le choix des k éléments communs, c'est-à-dire le choix d'un sous-ensemble de F de cardinal k : il y en a $\binom{p}{k}$;
- le choix d'éléments n'appartenant pas F, c'est-à-dire le choix d'un sous-ensemble de F^c : il y en a $2^{\#(F^c)} = 2^{n-p}$.

Il y a donc $\binom{p}{k} \times 2^{n-p}$ parties de E ayant k éléments communs avec F.