CY TECH sciences et techniques

Probabilités
L2 2024 – 2025

Devoir surveillé nº 1
18 octobre 2024

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure.

Barème : 10 points.

Exercice 1 (3,5 pts)**.** *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. Combien y a-t-il de nombres à 5 chiffres où le chiffre « 7 » apparait une fois et une seule ?
2. On considère un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Soient A et B des évènements tels que $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B^c)$.
3. **a.** Appliquer la formule du crible (ou formule de Poincaré) à $\#(A \cup B \cup C)$.

   b. Dans un lycée de 280 élèves, 200 suivent les cours d'anglais, 140 suivent les cours d'espagnol et 77 suivent les cours d'italien.

   Parmi ceux-ci, 100 suivent à la fois les cours d'anglais et d'espagnol, 31 suivent les cours d'anglais et d'italien, et 28 suivent les cours d'espagnol et d'italien.

   Combien d'élèves suivent à la fois les cours d'anglais, d'espagnol et d'italien ?

Exercice 2 (2 pts)**.** On considère un ensemble de n hommes et p femmes.

1. Combien peut-on former de groupes composés de k personnes ?
2. Combien peut-on former de groupes composés de i hommes et j femmes ?
3. En déduire la formule de Vandermonde :

$$\forall k \in [\![0, n+p]\!], \quad \binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i}.$$

Exercice 3 (3,5 pts)**.** L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets. Les candidats tirent au sort 3 sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ceux-ci. Un candidat se présente en ayant révisé un quart des sujets.

On note $E = [\![1, 100]\!]$ l'ensemble des sujets et on suppose que les sujets 1 à 25 sont ceux révisés par le candidat. On modélise cette expérience aléatoire par l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ où $\Omega = \mathscr{P}_3(E)$ (ensemble des parties à 3 éléments de E) et P est la probabilité uniforme.

1. Donner le cardinal de Ω.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a. A : « le candidat a révisé les 3 sujets tirés ».

   b. B : « le candidat a révisé exactement 2 des sujets tirés ».

   c. C : « le candidat a révisé au moins l'un des sujets tirés ».

Exercice 4 (1 pt)**.** Soit E un ensemble à n éléments et soit F une partie de E à p éléments. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, dénombrer les parties de E ayant k éléments en commun avec F.