Intégration
L2 M/P/CUPGE
2025 – 2026

Livret d'exercices

0 Calcul d'intégrales (révisions)

Exercice 1. Rappeler (ou rechercher) l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, ainsi que l'expression de leur dérivée :

1. arcsin **2.** arctan **3.** argsh **4.** argch

Exercice 2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur chaque intervalle où elles sont définies.

1. $f_1(x) := \dfrac{x^2}{1+x^3}$

2. $f_2(x) := \dfrac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $f_3(x) := \dfrac{1}{\tan x}$

4. $f_4(x) := \dfrac{(\ln x)^n}{x}$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. $f_5(x) := \dfrac{x}{x+1}$

6. $f_6(x) := \exp(x + \alpha e^x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := x\cos(2x)$ **2.** $f_2(x) := \ln(x)$ **3.** $f_3(x) := \arctan(x)$ **4.** $f_4(x) := \frac{x}{\cos^2 x}$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $I_1 := \displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{2x\ln x + x}\,dx$ avec $x = e^u$

2. $I_2 := \displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ avec $x = u^2 - 1$

3. $I_3 := \displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ avec $x = 2\sin u$

4. $I_4 := \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ avec $x = \tan u$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2025} \sin x\,dx.$

2. $I_2 := \displaystyle\int_0^{1} x\arctan x\,dx.$

3. $I_3 := \displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

4. $I_4 := \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x\,dx.$

5. $I_5 := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,dx$

6. $I_6 := \displaystyle\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx$

7. $I_7 := \displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx$

8. $I_8 := \displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin\left(x^5 + x^3\right)dx$

9. $I_9 := \displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx$

Exercice 6 (intégrales de Wallis)**.** Soit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx.$

1. Calculer W_0 et W_1.

2. Établir une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.

3. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}, \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

4. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

5. En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$ lorsque $n \to +\infty$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

7. En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puis que $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ lorsque $n \to +\infty$.

1 Sommes de Riemann

Exercice 7. Soient φ et ψ les fonctions en escalier définies sur $[0,2]$ par :

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ -2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\\ 4 & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}, \qquad \psi(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\\ 3 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left[\frac{7}{4}, 2\right] \end{cases}$$

1. Représenter les fonctions φ et ψ.
2. Montrer que $\varphi + \psi$ est une fonction en escalier.
3. Vérifier que $\int_0^2 (\varphi + \psi) = \int_0^2 \varphi + \int_0^2 \psi$.

Exercice 8. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := x^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère φ_n la fonction en escalier définie par $\varphi_n(x) := \frac{i^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, et on pose $\varphi_n(1) = \frac{(n-1)^2}{n^2}$.

1. Montrer qu'il existe $c > 0$ (à déterminer) telle que $\left|f(x) - \varphi_n(x)\right| \leq \frac{c}{n}$ pour tout $x \in [0,1]$.
2. En déduire que f est Riemann-intégrable et calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ à partir de la définition de l'intégrale de Riemann. Le résultat est-il cohérent avec vos connaissances ?

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Donner l'expression de la subdivision régulière de $[a,b]$ en n intervalles.
2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Calculer les limites suivantes :

   a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^3$

   b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$

   c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

   d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n + 3k}$

   e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

   f. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

4. **a.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

   b. En déduire la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right).$$

Exercice 10. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On admet que pour toutes fonctions en escalier φ, ψ, on a $\int_a^b (\lambda\varphi + \psi) = \lambda \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi$. Montrer que pour toutes fonctions Riemann-intégrables f, g, la fonction $\lambda f + g$ est Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Montrer que si f est positive et Riemann-intégrable, alors $\int_a^b f \geq 0$. En déduire que si f et g sont Riemann-intégrables et $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
3. Montrer que si f est Riemann-intégrable, alors $|f|$ est Riemann-intégrable et $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Exercice 11. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, posons $M = \sup_{[a,b]} |f'|$.

1. Justifier que $M < +\infty$.
2. Montrer que pour tous $c, d \in [a,b]$, $\left|\int_c^d \big(f(x) - f(c)\big)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{2}(d-c)^2$.
3. On note $x_k := a + k\frac{b-a}{n}$. Déduire de la question précédente que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \le \frac{M}{2n}(b-a)^2,$$

Exercice 12***.** Soit $I := [a,b]$ un intervalle et soit $\sigma := (a_i)_{1\le i\le n}$ une subdivision de I. On considère une fonction bornée $f\colon I \to \mathbb{R}$. On appelle *somme de Darboux inférieure* et *somme de Darboux supérieure* associée à la subdivision σ les sommes :

$$\Sigma^-(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i), \qquad \Sigma^+(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1} - a_i),$$

où $m_i := \inf\limits_{[a_i,a_{i+1}]} f$ et $M_i := \sup\limits_{[a_i,a_{i+1}]} f$.

1. Montrer que $m(b-a) \le \Sigma^-(f,\sigma) \le \Sigma^+(f,\sigma) \le M(b-a)$ où $m := \inf_I f$ et $M := \sup_I f$.
2. Soient f^+ et f^- les fonctions en escalier :

$$f^+ = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{I_i}, \quad f^- = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \mathbb{1}_{I_i},$$

   où $I_i = [a_i, a_{i+1}[$ si $1 \le i \le n-2$ et $I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n]$, et $\mathbb{1}_{I_i}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I_i. Montrer que $f^-(x) \le f^+(x)$ pour tout $x \in I$. Que valent les intégrales de f^+ et f^- ?
3. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $\Sigma^+(f,\sigma) - \Sigma^-(f,\sigma) \le \varepsilon$. Montrer que f est Riemann-intégrable sur I.
4. On veut prouver la réciproque de la question précédente. Supposons que f est Riemann-intégrable sur I.
   - **a.** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$, il existe des pointages $\xi^+ = (\xi_i^+)_{0\le i\le n}$ et $\xi^- = (\xi_i^-)_{0\le i\le n}$ associés à σ tels que :

$$\Sigma^+(f,\sigma) \le S(f,\sigma,\xi^+) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \Sigma^-(f,\sigma) \ge S(f,\sigma,\xi^-) - \varepsilon.$$

   - **b.** En déduire que tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $\Sigma^+(f,\sigma) - \Sigma^-(f,\sigma) \le \varepsilon$.
5. En déduire que toute fonction monotone sur I est Riemann-intégrable.

2 Intégrale des fonctions continues

Exercice 13. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. En justifiant, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La fonction F est lipschitzienne sur tout intervalle $[a,b]$.
2. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 14. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive.

1. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que f est continue en x_0 et $f(x_0) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
2. En déduire que si f est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle.

Exercice 15. Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la fonction $g\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ell$.
3. Donner un exemple où g admet une limite en $+\infty$ mais pas f.

Exercice 16. Soit $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) := \int_0^{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que si $f(0)=1$, alors g est décroissante sur un voisinage ouvert de π.

Exercice 17. Soit $a>0$, déterminer le minimum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) := \int_x^{x+a} |t|\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 18 (théorèmes de la moyenne)***.** Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer qu'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Soit $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue positive. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

   b. Comparer ce résultat avec la question 1.
3. Sous les mêmes hypothèses qu'à la question 2, on veut montrer qu'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $(*)$. On suppose que g n'est pas la fonction nulle et que f n'est pas constante (sinon, il n'y a rien à montrer).
   a. Justifier que f admet un maximum M et un minimum m sur l'intervalle $[a,b]$, et que $f([a,b])=[m,M]$.
   b. Montrer que $f(]a,b[)$ est un intervalle inclus dans $[m,M]$. En déduire que $]m,M[\,\subset f(]a,b[)$.
   c. Démontrer que $m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x < M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   d. Conclure.

Exercice 19. Montrer que pour toute fonction continue $f\colon [a,b]\to\,]0,+\infty[$:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geq (b-a)^2.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Exercice 20. Montrer que pour tous $b>a>0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 21. Soit $f\colon [0,a]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0)=0$. Montrer que :

$$\int_0^a f(x)^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{a^2}{2}\int_0^a f'(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

3 Intégrale des fractions rationnelles

Exercice 22. Déterminer la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes (on ne demande pas de calculer les coefficients).

1. $F_1(X) := \dfrac{X^3+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.
2. $F_2(X) := \dfrac{1}{(X+3)(X-2)^2}$.
3. $F_3(X) := \dfrac{X^3+1}{(X^2+1)(X-3)}$.
4. $F_4(X) := \dfrac{X^2}{X^4+2X^3-2X-1}$.
5. $F_5(X) := \dfrac{X^3+1}{(X^2-1)^2}$.
6. $F_6(X) := \dfrac{1}{(X^2+X+2)(X^2+2X+1)}$.

Exercice 23. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes.

1. $F_1(X) := \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.
2. $F_2(X) := \dfrac{1}{X(X+1)^2}$.
3. $F_3(X) := \dfrac{X^7+1}{X^2+1}$.
4. $F_4(X) := \dfrac{X^2}{(X-1)^3}$.
5. $F_5(X) := \dfrac{2X^3+3X^2+5}{X^2+X+1}$.
6. $F_6(X) := \dfrac{1}{X^4+X^2+1}$.

Exercice 24. Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) := \dfrac{1}{x^2-4x+2}$
2. $f_2(x) := \dfrac{x^3-2}{x^3-x^2}$
3. $f_3(x) := \dfrac{x}{x^2+x+1}$
4. $f_4(x) := \dfrac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$
5. $f_5(x) := \dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$
6. $f_6(x) := \dfrac{x^2(x^2+1)}{x^2+4}$
7. $f_7(x) := \dfrac{x+1}{x^4(x^2+x+1)}$
8. $f_8(x) := \dfrac{x}{(x-1)^5(x^2+1)}$
9. $f_9(x) := \dfrac{1}{x^6-1}$

Exercice 25.

1. En développant $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$ et $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$, montrer que si $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors :

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}.$$

2. À l'aide du changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer les primitives des fonctions suivantes :
   a. $f_1(x) := \dfrac{1}{\sin x}$
   b. $f_2(x) := \dfrac{1}{1+\cos x}$
   c. $f_3(x) := \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

Remarque : des changements de variables plus simples sont parfois possibles, voir les règles de Bioche.

4 Intégrales impropres

Exercice 26. À partir de la définition, déterminer si les intégrales impropres ci-dessous sont convergentes, et les calculer le cas échéant. Pour I_4 et I_5, discuter selon la valeur de $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. $I_1 := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$
2. $I_2 := \displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\,dx$
3. $I_3 := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$
4. $I_4 := \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
5. $I_5 := \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
6. $I_6 := \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$

Exercice 27. Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont convergentes (on ne cherche pas à les calculer).

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^x(x^2+1)\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\cos x}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{\ln^{\alpha}(x)}\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(\sqrt{x})-\tan(\sqrt{x})}{x^2}\,\mathrm{d}x$
23. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\sin(x^2)}{(1-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$
24. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 28 (Examen 2022–2023)**.** Soit $\alpha \geq 0$ un réel. Étudier, en fonction de α, la convergence de l'intégrale généralisée :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{5x^3+3x+1}{\sqrt{x}\,(2x^\alpha+3x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Justifier vos réponses et préciser en quelle(s) borne(s) I_α est généralisée.

Exercice 29. On considère l'intégrale généralisée suivante, appelée intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que I est une intégrale convergente.
2. On souhaite montrer que l'intégrale de Dirichlet n'est pas absolument convergente.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$
   b. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Exercice 30. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 31. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement Riemann–intégrable telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la limite de $G(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

5 Limites d'intégrales

Exercice 32. Pour tout $n \geq 2$, soit f_n la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que f_n est nulle sur $[0,n[\cup]2n^2,+\infty[$, f_n est affine sur $[n,2n]$ et sur $[2n,2n^2]$, et $f_n(2n)=\frac{1}{n}$.

1. Représenter f_n.

2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. A-t-on $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ lorsque $n\to+\infty$?

Exercice 33. Pour tout $x>0$, on considère $f_n(x) := \dfrac{\sin(x^n)}{x^n(1+x^2)}$.

1. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$.

2. En déduire que f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

3. Calculer la limite ponctuelle de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Calculer la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 34. Soit $f\colon [a,b]\to[0,1]$ une fonction strictement croissante telle que $f(b)=1$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 35. Après avoir justifier l'existence des intégrales pour tout n, calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n^2x^4+3x^2+7}{(n^2x^4+3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1}\frac{n\sqrt{x}+1}{nx+1}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 36. Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue qui converge vers une limite ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.

2. Déterminer la limite de $\int_0^{+\infty}\frac{f(nx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ lorsque $n\to+\infty$.

3. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(t)}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ell.$$

Exercice 37. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2. Montrer que $I_n = 1-\frac{\ln 2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. *Indication : intégrer par partie* $1-I_n$.

Exercice 38. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est convergente.

2. On pose $S_n(x)=\sum_{k=0}^n \mathrm{e}^{-kx}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(x)\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x.$$

4. En déduire que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

6 Intégrales à paramètre

Exercice 39. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par l'intégrale à paramètre :

$$f(x) := \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ et $f''(x)$ comme des intégrales à paramètre.
3. Montrer que $x\big(f''(x) + f(x)\big) = \int_0^{\pi} x \cos^2(t) \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t$.
4. En intégrant par partie cette dernière intégrale, montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Exercice 40. On appelle fonction gamma d'Euler la fonction définie par :

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
2. Montrer que Γ est continue sur sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Indication : montrer que Γ *est continue sur tout intervalle* $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\Gamma(1) = 1$ et $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
5. Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 41 (Examen 2023 – 2024)**.** L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss :

$$I := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on introduit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\Phi'(x)$.
3. En utilisant le changement de variable $u = t\sqrt{x}$, relier $\int_0^A \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{A\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. En déduire une relation entre $\Phi'(x)$, $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ et I.
4. En utilisant le changement de variable $x = t^2$, établir une relation entre $\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\sqrt{A}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $A > 0$.
5. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0$ et calculer $\Phi(0)$.
6. En intégrant la relation trouvée à la question 3 entre 0 et $A > 0$, puis en faisant tendre A vers $+\infty$, calculer I.

Exercice 42. L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale de Dirichlet $I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ sur $]0,+\infty[$. En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ pour tout $x > 0$.

4. Posons $G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ est donner l'expression de $G'(x)$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) - F(0) = -\int_0^{+\infty} G\left(\frac{s}{x}\right) \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$.
6. Démontrer que F est continue en 0 et en déduire la valeur de I.

Exercice 43. Soit I un intervalle. On considère $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant une dérivée partielle par rapport à sa première variable telle que $\partial_x f$ soit continue sur $I \times \mathbb{R}$. Soient $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $v\colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Calculer la dérivée de :

$$F(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

en fonction de u, v, f et de leurs dérivées.

7 Intégrales doubles

Exercice 44. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants.

1. $f(x,y) = x^2 y$, $D = [0,2] \times [0,1]$.
2. $f(x,y) = x^2 y$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{x}{2}\right\}$.
3. $f(x,y) = x^2 y$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\right\}$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x\right\}$.
5. $f(x,y) = xy$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \ge 0,\ x - 4y + 2 \ge 0,\ x - 2y - 2 \le 0\right\}$.
6. $f(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \ge 0,\ 2y \le x \le 3 - y\right\}$.

Exercice 45. Vérifier que l'application $\Phi\colon U \to V$ est un $\mathscr{C}^1$–difféomorphisme et calculer son jacobien.

1. $U = V = \mathbb{R}^2$ et $\Phi(u,v) = (au + bv, cu + dv)$ avec $ad - bc \neq 0$.
2. $U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, et $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 46 (aire intérieure d'une ellipse)**.** Calculer l'aire de $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 47. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants, à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, D est le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$, D est le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1.
3. $f(x,y) = x + y$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$.
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,\middle|\, 2y \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$

Exercice 48. L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $R > 0$, on note $D(R)$ le disque de centre $(0,0)$ et de rayon R, et on note $C(R) = [-R,R]^2$. On considère la fonction $f(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$.

1. Justifier la convergence de I.
2. Montrer que :
$$\iint_{D(R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{C(R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{D(R\sqrt{2})} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
3. Calculer $\iint_{D(R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
4. En déduire la valeur de I.