TD7 – Intégrales à paramètre

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par l'intégrale à paramètre :

$$f(x) := \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ et $f''(x)$ comme des intégrales à paramètre.
3. Montrer que $x\big(f''(x) + f(x)\big) = \int_0^{\pi} x \cos^2(t) \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t$.
4. En intégrant par partie cette dernière intégrale, montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Exercice 2. On appelle fonction gamma d'Euler la fonction définie par :

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
2. Montrer que Γ est continue sur sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Indication : montrer que Γ est continue sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\Gamma(1) = 1$ et $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
5. Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 3 (Examen 2023–2024)**.** L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale de Gauss $I := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\Phi'(x)$.
3. En utilisant le changement de variable $u = t\sqrt{x}$, relier $\int_0^A \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{A\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. En déduire une relation entre $\Phi'(x)$, $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ et I.
4. En utilisant le changement de variable $x = t^2$, établir une relation entre $\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\sqrt{A}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $A > 0$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0$ et calculer $\Phi(0)$.
6. En intégrant la relation trouvée à la question 3 entre 0 et $A > 0$, puis en faisant tendre A vers $+\infty$, calculer I.

Exercice 4. L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale de Dirichlet $I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$. En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Posons $G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ est donner l'expression de $G'(x)$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) - F(0) = -\int_0^{+\infty} G\big(\frac{s}{x}\big) \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$. *Indication : IPP et changement de variable.*
6. Démontrer que F est continue en 0 et en déduire la valeur de I.