Intégration
CUPGE 2e année
2024 – 2025

TD6 – Limites d'intégrales

Exercice 1. Pour tout $n \geq 2$, soit f_n la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que f_n est nulle sur $[0, n[\cup]2n^2, +\infty[$, f_n est affine sur $[n, 2n]$ et sur $[2n, 2n^2]$, et $f_n(2n) = \frac{1}{n}$.

1. Représenter f_n.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. A-t-on convergence de $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ vers 0 lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 2. Pour tout $x > 0$, on considère $f_n(x) := \dfrac{\sin(x^n)}{x^n(1+x^2)}$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$.
2. En déduire que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer la limite ponctuelle de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Calculer la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3. Après avoir justifier l'existence des intégrales pour tout n, calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}+1}{nx+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2x^4+3x^2+7}{(n^2x^4+3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}+1}{2nx+1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui converge vers une limite ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Déterminer la limite de $\int_0^{+\infty} \frac{f(nx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(t)}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ell.$$

Exercice 5. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Montrer que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. *Indication : intégrer par partie* $1 - I_n$.

Exercice 6. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est convergente.
2. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \mathrm{e}^{-kx}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x.$$

4. En déduire que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.