TD5 – Intégrales impropres

Exercice 1. À partir de la définition, déterminer si les intégrales impropres ci-dessous sont convergentes, et les calculer le cas échéant.

1. $I_1 := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 := \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 := \int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $I_4 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $I_5 := \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$
6. $I_6 := \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$

Exercice 2. Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont convergentes (on ne cherche pas à les calculer).

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_1^{+\infty} (x^2+1)\,\mathrm{d}x$
9. $\int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^x(x^2+1)\,\mathrm{d}x$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$
11. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$
12. $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$
13. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$
14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}$
15. $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-8}$
16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
17. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
18. $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\ln^\alpha(x)}$
19. $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$
20. $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$
22. $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})-\tan(\sqrt{x})}{x^2}\,\mathrm{d}x$
23. $\int_1^2 \frac{\cos x}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
24. $\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$
25. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-1}}$
26. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
27. $\int_0^1 \frac{x\sin(x^2)}{(1-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$
28. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}\cos(x)\,\mathrm{d}x$
29. $\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$
30. $\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 (Examen 2022–2023)**.** Soit $\alpha \geq 0$ un réel. Étudier, en fonction de α, la convergence de l'intégrale généralisée :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{5x^3+3x+1}{\sqrt{x}\,(2x^\alpha+3x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Justifier vos réponses et préciser en quelle(s) borne(s) I_α est généralisée.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement Riemann–intégrable telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la limite de $G(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 5. On considère l'intégrale généralisée suivante, appelée intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que I est une intégrale convergente.
2. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.
3. On souhaite montrer que l'intégrale de Dirichlet n'est pas absolument convergente.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{(n+1)\pi}.$$
   b. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Exercice 6. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 7. Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\left| \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:
   $$\left| \int_n^{n+p} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=n}^{n+p-1} f(k) \right| \leq \int_n^{n+p} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que si les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ convergent, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge.
4. Application : montrer que la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.