TD3 – Calculs d'intégrales

Exercice 1. Rappeler (ou rechercher) l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, ainsi que l'expression de leur dérivée :

1. arcsin **2.** arctan **3.** argsh **4.** argch

Exercice 2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition :

1. $f_1(x) := \dfrac{x^2}{1+x^3}$

2. $f_2(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

3. $f_3(x) := \dfrac{1}{\tan x}$

4. $f_4(x) := \dfrac{1}{x\ln x}$

5. $f_5(x) := \dfrac{x}{x+1}$

6. $f_6(x) := \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$

7. $f_7(x) := \exp(\mathrm{e}^x + x)$

8. $f_8(x) := \dfrac{1}{2x^2+3}$.

Exercice 3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := x\cos(2x)$ **2.** $f_2(x) := \ln(x)$ **3.** $f_3(x) := \arctan(x)$ **4.** $f_4(x) := \frac{x}{\cos^2 x}$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $I_1 := \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2x\ln x + x}\,\mathrm{d}x$ avec $x = \mathrm{e}^u$

2. $I_2 := \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ avec $x = u^2 - 1$

3. $I_3 := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ avec $x = 2\sin u$

4. $I_4 := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ avec $x = \tan u$

Exercice 5. Soit $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si f est impaire, que vaut $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$?

2. Que peut-on dire si f est paire ?

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2025}\sin x\,\mathrm{d}x$.

2. $I_2 := \displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

3. $I_3 := \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

4. $I_4 := \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$.

5. $I_5 := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$

6. $I_6 := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$

7. $I_7 := \displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$

8. $I_8 := \displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin\big(x^5 + x^3\big)\,\mathrm{d}x$

9. $I_9 := \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 7. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer $I := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 (intégrales de Wallis)**.** Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. Établir une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.

3. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\,\frac{\pi}{2}, \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

4. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

5. En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$ lorsque $n \to +\infty$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

7. En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puis que $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ lorsque $n \to +\infty$.