Intégration
L2 2024 – 2025

TD2 – Continuité et intégration

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. En justifiant, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive.

1. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
2. En déduire que si f est positive et que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle.

Exercice 3. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer que f possède un point fixe dans $]0,1[$ (c.-à-d. qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$).

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la fonction $g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.
3. Donner un exemple où g admet une limite en $+\infty$ mais pas f.

Exercice 5. Soit $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) := \int_0^{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que si $f(0) = 1$, alors G est décroissante sur un voisinage ouvert de π.

Exercice 6. Soit $a > 0$, déterminer le minimum de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) := \int_x^{x+a} |t|\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive strictement croissante telle que $f(b) = 1$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 8. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Indication : pour $\varepsilon > 0$, considérer $x_0 \in]a,b[$ tel que $M - \varepsilon < f(x_0) < M$, où $M = \sup_{[a,b]} f$.

Exercice 9 (formules de la moyenne)**.** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

   b. Comparer ce résultat avec la question 1.
3. Sous les mêmes hypothèses qu'à la question 2, on veut montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $(*)$.
   a. Justifier que f admet un maximum M et un minimum m sur l'intervalle $[a,b]$, et que $f([a,b]) = [m,M]$.
   b. Montrer que $f(]a,b[)$ est un intervalle inclus dans $[m,M]$. En déduire que $]m,M[\, \subset f(]a,b[)$.
   c. Démontrer que $m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x < M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   d. Conclure.

Exercice 10 (inégalité de Jensen)**.** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer l'inégalité intégrale de Jensen :

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

à partir de l'inégalité de Jensen discrète.

Exercice 11. Montrer que pour toute fonction continue $f\colon [a,b] \to \,]0,+\infty[$:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geq (b-a)^2.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Exercice 12. Montrer que pour tous $b > a > 0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 13. Soit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\int_0^a f(x)^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{a^2}{2}\int_0^a f'(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 14. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann–intégrable et soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que $g \circ f$ est Riemann–intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 15*. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann–intégrable et soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est Riemann–intégrable sur $[a,b]$.