TD1 – Intégrale et sommes de Riemann

Exercice 1. Soient φ et ψ les fonctions en escalier définies sur $[0,2]$ par :

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ -2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\\ 4 & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}, \qquad \psi(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\\ 3 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left[\frac{7}{4}, 2\right] \end{cases}$$

1. Représenter les fonctions φ et ψ.
2. Montrer que $\varphi + \psi$ est une fonction en escalier.
3. Vérifier que $\int_0^2 (\varphi + \psi) = \int_0^2 \varphi + \int_0^2 \psi$.

Exercice 2. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := x^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère φ_n la fonction en escalier définie par $\varphi_n(x) := \frac{i^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, et on pose $\varphi_n(1) = \frac{(n-1)^2}{n^2}$.

1. Montrer qu'il existe $c > 0$ (à déterminer) telle que $\left|f(x) - \varphi_n(x)\right| \leq \frac{c}{n}$ pour tout $x \in [0,1]$.
2. En déduire que f est Riemann-intégrable et calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ à partir de la définition de l'intégrale de Riemann.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g Riemann-intégrable sur $[a,b]$ telle que $|f - g| \leq \varepsilon$. Montrer que f est Riemann-intégrable.

Exercice 4. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On admet que pour toutes fonctions en escalier φ, ψ, on a $\int_a^b (\lambda\varphi + \psi) = \lambda \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi$. Montrer que pour toutes fonctions Riemann-intégrables f, g, la fonction $\lambda f + g$ est Riemann-intégrable et on a :
$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$
2. Montrer que si f est positive et Riemann-intégrable, alors $\int_a^b f \geq 0$. En déduire que si f et g sont Riemann-intégrables et $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
3. Montrer que si f est Riemann-intégrable, alors $|f|$ est Riemann-intégrable et $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Exercice 5.

1. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Montrer que :
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
2. Calculer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3$

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{2n+3k}$

Exercice 6. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, posons $M = \sup_{[a,b]}|f'| \in \mathbb{R}_+$ *(pourquoi $M < +\infty$?).*

1. Montrer que pour tous $c, d \in [a,b]$, $\left|\int_c^d \big(f(x) - f(c)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M}{2}(d-c)^2$.
2. En déduire que :
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2,$$
où $a_k := a + k\frac{b-a}{n}$.

Exercice 7. Soit $I := [a,b]$ un intervalle et soit $\sigma := (a_i)_{1\leq i\leq n}$ une subdivision de I. On considère une fonction bornée $f\colon I \to \mathbb{R}$. On appelle *somme de Darboux inférieure* et *somme de Darboux supérieure* associée à la subdivision σ les sommes :
$$\Sigma^-(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i), \qquad \Sigma^+(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1} - a_i),$$
où $m_i := \inf\limits_{[a_i,a_{i+1}]} f$ et $M_i := \sup\limits_{[a_i,a_{i+1}]} f$.

1. Montrer que $m(b-a) \leq \Sigma^-(f,\sigma) \leq \Sigma^+(f,\sigma) \leq M(b-a)$ où $m := \inf_I f$ et $M := \sup_I f$.
2. Soient f^+ et f^- les fonctions en escalier :
$$f^+ = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbf{1}_{I_i}, \quad f^- = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \mathbf{1}_{I_i},$$
où $I_i = [a_i, a_{i+1}[$ si $1 \leq i \leq n-2$ et $I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n]$, et $\mathbf{1}_{I_i}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I_i. Montrer que $f^-(x) \leq f^+(x)$ pour tout $x \in I$. Que valent les intégrales de f^+ et f^- ?
3. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $\Sigma^+(f,\sigma) - \Sigma^-(f,\sigma) \leq \varepsilon$. Montrer que f est Riemann-intégrable sur I.
4. On veut prouver la réciproque de la question précédente. Supposons que f est Riemann-intégrable sur I.
   a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$, il existe des pointages $\xi^+ = (\xi_i^+)_{0\leq i\leq n}$ et $\xi^- = (\xi_i^-)_{0\leq i\leq n}$ associés à σ tels que :
   $$\Sigma^+(f,\sigma) \leq S(f,\sigma,\xi^+) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \Sigma^-(f,\sigma) \geq S(f,\sigma,\xi^-) - \varepsilon.$$
   b. En déduire que tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $\Sigma^+(f,\sigma) - \Sigma^-(f,\sigma) \leq \varepsilon$.
5. En déduire que toute fonction monotone sur I est Riemann-intégrable.