Devoir surveillé n° 2
Correction

Exercice 1. **1.** On effectue le changement de variable $t = \ln x$:

$$I_A = \int_{\mathrm{e}}^{A} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\ln A} \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-1} - \dfrac{1}{(\beta-1)(\ln A)^{\beta-1}} & \text{si } \beta \neq 1, \\ \ln(\ln A) & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, si $\beta \leq 1$ alors I_A diverge vers $+\infty$ lorsque $A \to +\infty$, et si $\beta > 1$ alors I_A converge vers $\frac{1}{\beta-1}$. Ainsi, l'intégrale I est convergente si et seulement si $\beta > 1$ et dans ce cas :

$$I = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta-1}.$$

Exercice 2.

1. **a.** Le dénominateur de F se factorise en $X^2(2X-1)$, donc la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F(X) = \frac{1}{X^2(2X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{2X-1},$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On trouve b et c par multiplication-évaluation :

- $X^2F(X) = \frac{1}{2X-1} = aX + b + \frac{cX^2}{2X-1}$, donc en évaluant en $X = 0$, on obtient $b = -1$.
- $(2X-1)F(X) = \frac{1}{X^2} = \frac{a(2X-1)}{X} - \frac{(2X-1)}{X^2} + c$, donc en évaluant en $X = \frac{1}{2}$, on obtient $c = 4$.

Ainsi :

$$F(X) = \frac{a}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{4}{2X-1}.$$

Pour trouver a, on peut évaluer en une valeur quelconque (autre que 0 et $\frac{1}{2}$), ou regarder la limite de $xF(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Cette dernière option nous dit que $0 = a + 2$, donc $a = -2$. La décomposition en éléments simples de F est :

$$F(X) = -\frac{2}{X^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{4}{2X-1}.$$

b. Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, donc la décomposition en éléments simples de G est de la forme :

$$G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1},$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On trouve les coefficients par multiplication-évaluation :

- $(X-1)G(X) = \frac{X}{X^2+1} = a + \frac{bX+c}{X^2+1}(X-1)$, donc en évaluant en $X = 1$, on obtient $a = \frac{1}{2}$.
- $(X^2+1)G(X) = \frac{X}{X-1} = \frac{1}{2}\frac{X^2+1}{X-1} + bX + c$, donc en évaluant en $X = \mathrm{i}$, on obtient :

$$b\mathrm{i} + c = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1} = \frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},$$

  donc $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.

La décomposition en éléments simples de G est :

$$G(X) = \frac{1}{2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2}\frac{1-X}{X^2+1}.$$

2. Remarquons que le polynôme X^2+2X+5 a un discriminant strictement négatif, donc la fonction $u(x)=x^2+2x+5$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (en particulier, elle ne s'annule pas). La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc les primitives de f sont les fonctions de la forme :

$$F(x)=\ln\left(x^2+2x+5\right)+C,$$

avec $C\in\mathbb{R}$ une constante.

3. Posons $h=2g-f$, c'est-à-dire :

$$h(x)=\frac{2x+6}{x^2+2x+5}-\frac{2x+2}{x^2+2x+5}=\frac{4}{x^2+2x+5}.$$

Cherchons les primitives de h. On écrit le dénominateur sous forme canonique :

$$h(x)=\frac{4}{x^2+2x+5}=\frac{4}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}.$$

On reconnait une fonction de la forme $\frac{1}{u^2+1}$ avec u une fonction affine. Les primitives de h sont les fonctions la forme :

$$H(x)=2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C,$$

avec $C\in\mathbb{R}$ une constante. Puisque $g=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}h$, les primitives de g sont les fonctions de la forme :

$$G(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C,$$

avec $C\in\mathbb{R}$ une constante.

Exercice 3.

1. La fonction $x\mapsto\frac{\sin x}{2025+\cos x}\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc intégrable sur tout intervalle $[0,A]$ avec $A>0$; l'intégrale I_1 est généralisée en $+\infty$. On a la majoration :

$$\left|\frac{\sin x}{2025+\cos x}\mathrm{e}^{-x}\right|\leq\mathrm{e}^{-x},$$

et e^{-x} est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc I_1 est absolument convergente.

2. La fonction $x\mapsto\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc elle est intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon,A]$ avec $0<\varepsilon<A$; l'intégrale I_2 est généralisée en 0 et en $+\infty$. Au voisinage de 0, la fonction est positive et on a l'équivalent :

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+x}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x}.$$

Or la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 (Riemann), donc $x\mapsto\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+x}$ n'est pas intégrable en 0. L'intégrale I_2 est divergente.

3. La fonction $x\mapsto\frac{x^{3/2}}{1-\cos x}$ est continue sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc elle est intégrable sur tout intervalle $\left[\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right]$ avec $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$; l'intégrale I_3 est généralisée en 0. Au voisinage de 0, la fonction est positive et on a l'équivalent :

$$\frac{x^{3/2}}{1-\cos x}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{x^{3/2}}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Or la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrale au voisinage de 0 (Riemann), donc I_3 est convergente.

4. La fonction $x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x^\alpha)}$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$ donc elle est intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon,1]$ avec $0<\varepsilon<1$; l'intégrale I_4 est généralisée en 0. Au voisinage de 0, la fonction est positive et on a l'équivalent :

$$\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x^\alpha)}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{\sqrt{x}}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

Or $x\mapsto x^{\alpha-\frac{1}{2}}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\alpha-\frac{1}{2}<1$ (Riemann), c'est-à-dire $\alpha<\frac{3}{2}$. Ainsi, I_4 est convergente si et seulement si $\alpha<\frac{3}{2}$.