Intégration
CUPGE 2e année
2024 – 2025

Devoir surveillé nº 2
4 avril 2025

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure (tiers temps : 1 heure 20 minutes).

Barème : 10 points.

Exercice 1 (2 pts)**.** Soit β un nombre réel strictement positif.

1. Pour tout $A > \mathrm{e}$, calculer l'intégrale :
$$I_A := \int_{\mathrm{e}}^{A} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x.$$
On distinguera différents cas selon la valeur de β.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur β pour que l'intégrale généralisée I ci-dessous soit convergente, et calculer sa valeur :
$$I := \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 (4 pts)**.**

1. Calculer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes.
   a. $F(X) := \dfrac{1}{2X^3 - X^2}$. **b.** $G(X) := \dfrac{X}{(X-1)(X^2+1)}$.
2. Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) := \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}$.
3. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g(x) := \dfrac{x+3}{x^2+2x+5}$.
Indication : considérer la fonction $h = 2g - f$.

Exercice 3 (4 pts)**.** Déterminer si les intégrales généralisée suivantes sont convergentes, en précisant pour quelle(s) borne(s) elles sont généralisées. Pour la dernière, discuter suivant la valeur de α.

1. $I_1 := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2025 + \cos x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$
2. $I_2 := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x.$
3. $I_3 := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{3/2}}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x.$
4. $I_4 := \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1 + x^\alpha)}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$