Intégration
CUPGE 2$^{\text{e}}$ année
2024 – 2025

Devoir surveillé nº 1
Correction

Exercice 1 (4 pts)**.**

1. L'intégrande est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$, donc :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \Big[\log(1+\mathrm{e}^x)\Big]_0^1 = \log(1+\mathrm{e}) - \log(2) = \log\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right).$$

2. On intègre par partie avec $u'(x) = x$ et $v(x) = \log(x)$:

$$I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} x\log(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\log(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

3. On effectue le changement de variable $u = \sqrt[3]{x}$, c'est-à-dire $x = u^3$:

- $\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$;
- lorsque x varie de 1 à 8, u varie de 1 à 2.

$$I_3 = \int_1^8 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{3u^2}{u^3+u}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{3u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\Big[\log(1+u^2)\Big]_1^2 = \frac{3}{2}\log\left(\frac{5}{2}\right).$$

4. On effectue le changement de variable $x = \sin u$, avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$:

- $\mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$;
- lorsque u varie de 0 à $\frac{\pi}{6}$, on a bien x qui varie de 0 à $\frac{1}{2}$.

$$I_4 = \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos u}{\left(1-\sin^2 u\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos u}{\left(\cos^2 u\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u.$$

Une primitive de $\frac{1}{\cos^2 u}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ est $\tan u$ donc :

$$I_4 = \Big[\tan u\Big]_0^{\pi/6} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - \tan(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 2 (2 pts)**.** On reconnait que :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4n^2}}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(a_{k+1}-a_k) = S(f,a,\xi),$$

avec $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a_k := \frac{k}{2n}$ et $\xi_k := \frac{k}{2n} \in [a_k, a_{k+1}]$. Les $(a_k)_{0\le k\le n}$ forment une subdivision régulière de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et f est Riemann–intégrable sur cet intervalle car continue sur cet intervalle, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4n^2}}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[\arcsin(x)\Big]_0^{1/2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 3 (4 pts)**.** Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

1. a. On dit que f est Riemann–intégrable sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que :

$$|f-\varphi| \le \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

(J'acceptais aussi la définition séquentielle.)

b. Par définition de la Riemann–intégrabilité (avec disons $\varepsilon = 1$), soient φ et ψ des fonctions en escalier telles que $|f-\varphi| \leq \psi$. On a alors :

$$\varphi - \psi \leq f \leq \varphi + \psi.$$

Or les fonctions en escalier $\varphi - \psi$ et $\varphi + \psi$ sont bornées, donc f est bornée.

2. Pour tout $x \in [a,b]$, on définit $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Soit $M > 0$ un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$, et soient $x, y \in [a,b]$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $y \leq x$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|F(x)-F(y)\right| &= \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_y^x \left|f(t)\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_y^x M\,\mathrm{d}t = M(x-y) = M|x-y|.
\end{aligned}$$

Remarque : si vous avez utilisé le théorème des accroissements finis appliqué à F en disant que $F' = f$ d'après le théorème fondamental de l'analyse, c'est faux car on ne suppose pas que f est continue dans cette question ! (la continuité de f est une hypothèse essentielle du TFA)

b. Réponse courte : d'après la question précédente, F est Lipschitzienne sur $[a,b]$, donc elle est uniformément continue sur $[a,b]$. A fortiori, elle est continue sur $[a,b]$.

Réponse plus terre à terre : soit $x_0 \in [a,b]$, montrons que F est continue en x_0. D'après la question précédente, on a pour tout $x \in [a,b]$:

$$0 \leq |F(x)-F(x_0)| \leq M|x-x_0|.$$

Par encadrement, $|F(x)-F(x_0)| \to 0$ lorsque $x \to x_0$, donc $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, CQFD.

3. Soit $x_0 \in [a,b[$.

a. Remarquons que :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et que

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t \quad \text{(intégrale d'une constante).}$$

La linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire nous donnent alors :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left|f(t)-f(x_0)\right|\mathrm{d}t.$$

b. Supposons que f est continue à droite et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_0, x_0+\delta]$, on a $|f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \in]0,\delta]$, on a d'après la question précédente :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ceci démontre que :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

donc F est dérivable à droite en x_0 et $F'_{\mathrm{d}}(x_0) = f(x_0)$.