Intégration

CUPGE 2e année

2024 – 2025

Devoir surveillé nº 1

21 février 2024

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure (tiers temps : 1 heure 20 minutes).

Barème : 10 points.

Exercice 1 (4 pts)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

2. $I_2 := \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

3. $I_3 := \displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ (poser $u = \sqrt[3]{x}$)

4. $I_4 := \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = \sin u$)

Exercice 2 (2 pts)**.** En reconnaissant une somme de Riemann d'une certaine fonction, associée à une subdivision $(a_k)_{0\le k\le n}$ et à un pointage $(\xi_k)_{0\le k\le n-1}$, que l'on précisera, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4n^2}}}.$$

Exercice 3 (4 pts)**.** Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

1. **a.** Rappeler la définition de « f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ ».

b. Démontrer que f est bornée sur $[a,b]$.

2. Pour tout $x\in[a,b]$, on définit $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Soit $M>0$ un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |F(x)-F(y)|\le M|x-y|.$$

b. En déduire que F est continue sur $[a,b]$.

3. Soit $x_0\in[a,b[$.

a. Montrer que pour tout $h>0$ tel que $x_0+h\le b$, on a :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire que si f est continue à droite en x_0, alors F est dérivable à droite en x_0 et $F'_{\mathrm{d}}(x_0) = f(x_0)$.