

Livret d'exercices

1 Résolution d'équations

Exercice 1. Considérons l'équation :

$$x(1 + e^x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle x_* .
2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

- a. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
- b. Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_* , et majorer $|x_n - x_*|$.
- c. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer n tel que $|x_n - x_*| \leq \varepsilon$.

Exercice 2. Considérons l'équation :

$$x = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle x_* .
2. En utilisant la relation $x_* = e^{-x_*}$, montrer que $x_* \in]e^{-1}, 1[\subset]0, 1[$.
3. Combien d'itérations de la méthode de la dichotomie, appliquée sur $[0, 1]$, garantissent une approximation de x_* à 10^{-6} près ?
4. Soit $F(x) := e^{-x}$.
 - a. Montrer que $[e^{-1}, 1]$ est stable par F .
 - b. Montrer que F est contractante sur cet intervalle, et en déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_0 \in [e^{-1}, 1]$, converge vers x_* .
 - c. Cette convergence est-elle au moins linéaire, au moins quadratique ?
5. Soit $f(x) := e^{-x} - x$.
 - a. Donner la relation de récurrence de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par la méthode de Newton appliquée à f .
 - b. Montrer que $[0, 1]$ est stable par la fonction d'itération de la méthode de Newton.
 - c. En déduire que, pour tout $y_0 \in [0, 1]$, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_* , et déterminer n tel que $|y_n - x_*| \leq 10^{-6}$.

Exercice 3 (Méthode de Newton pour l'inverse). Soit $a > 0$. On cherche à déterminer une valeur approchée de $\frac{1}{a}$ à l'aide de la fonction $g(x) := \frac{1}{x} - a$. On note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la méthode de Newton appliquée à g .

1. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être calculée sans effectuer de division.
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{a}$ si et seulement si $0 < x_0 < \frac{2}{a}$.

Exercice 4 (Accélération de convergence). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\lambda, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ tels que $|q_2| < |q_1| < 1$ et :

$$u_n = \ell + \lambda q_1^n + O(q_2^n).$$

1. *Procédé de Richardson*. On pose :

$$v_n := \frac{u_{n+1} - q_1 u_n}{1 - q_1}.$$

Montrer que $v_n = \ell + O(q_2^n)$.

2. *Procédé d'Aitken*. On pose :

$$t_n := \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}, \quad w_n := \frac{u_{n+1} - t_n u_n}{1 - t_n} = u_n - \frac{(u_{n+1} - u_n)^2}{u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2}}.$$

- a. Montrer que $t_n = q_1 + O\left(\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n\right)$.
- b. En déduire que $w_n = \ell + O(q_2^n)$.

Exercice 5 (Calcul de π par la méthode d'Archimède). On considère la suite $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, $n \geq 2$.

- 1. Montrer que u_n est le demi périmètre d'un polynôme régulier à 2^n côté inscrit dans le cercle unité.
- 2. On considère les suites $c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $s_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
 - a. À l'aide des formules de duplication, montrer que :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}}, \quad s_{n+1} = \frac{s_n}{2c_{n+1}}.$$

- b. En déduire une méthode de calcul de u_n , qui ne nécessite ni de connaître la valeur de π , ni d'évaluer les fonctions sin et cos.
- 3. Montrer que $u_n = \pi + \lambda q_1^n + O(q_2^n)$ avec λ, q_1 et q_2 des nombres que vous déterminerez.
- 4. Accélérer la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2 Approximation polynomiale

Exercice 6. Soit f une fonction, notons $a = f(-1)$, $b = f(0)$ et $c = f(1)$. Calculer le polynôme interpolateur de f aux nœuds $(-1, 0, 1)$:

- 1. dans la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- 2. dans la base des polynômes de Newton.

Exercice 7. Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts et $\Pi_n(X) := \prod_{i=0}^n (X - x_i)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que le reste de la division euclidienne de P par Π_n est le polynôme interpolateur de P aux nœuds $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$.

Exercice 8. Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note P_n le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux nœuds $x_0, \dots, x_n$.

- 1. Rappeler l'expression de P_n dans la base des polynômes de Lagrange $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$, puis dans la base des polynômes de Newton.
- 2. En déduire que :

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Exercice 9 (Interpolation d'Hermite en 2 points). On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^4([0, 1])$.

- 1. Montrer qu'il existe une unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = f(1), \quad P'(1) = f'(1).$$

Ce polynôme est appelé le **polynôme interpolateur d'Hermite à l'ordre 1** de f en 0 et en 1.

2. On considère le polynôme $\Pi(X) = X^2(X-1)^2$. Pour tous $x, t \in [0, 1]$, on pose :

$$R(x) := f(x) - P(x), \quad F_x(t) := R(t)\Pi(x) - R(x)\Pi(t).$$

- a. Déterminer les racines communes de R et Π , ainsi que leur multiplicité.
- b. Pour $x \in]0, 1[$, montrer à l'aide du lemme de Rolle itéré qu'il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que $F_x^{(4)}(\xi) = 0$.
- c. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \Pi(x).$$

- d. En déduire que :

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{1}{4! \times 16} \|f^{(4)}\|_\infty = \frac{1}{384} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

3. On cherche maintenant à majorer l'écart entre f' et P' .

- a. Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $R'(a) = 0$.
- b. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $\xi \in]0, 1[$ tels que :

$$f'(x) - P'(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{3!} x(x-a)(x-1).$$

- c. En déduire que :

$$\|f' - P'\|_\infty \leq \frac{1}{24} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Exercice 10 (Polynômes de Legendre). On munit $\mathcal{C}([-1, 1])$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On appelle polynômes de Legendre les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonaux pour ce produit scalaire et satisfaisant $P_n(1) = 1$.

- 1. Calculer P_0, P_1 et P_2 .
- 2. En déduire le polynôme de meilleure approximation de degré 2 de la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$ pour la norme $\|\cdot\|$.
- 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
- 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Phi_n(X) := (X^2 - 1)^n$.
 - a. Quelles sont les racines de Φ_n et quelles sont leurs multiplicités ?
 - b. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. À l'aide de n intégrations par parties successives, montrer que :

$$\int_{-1}^1 \Phi_n^{(n)}(x) Q(x) dx = 0.$$

- c. En déduire qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $P_n(X) = \lambda_n \Phi_n^{(n)}(X)$.
- d. À l'aide de la condition $P_n(1) = 1$, montrer la formule de Rodrigues :

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n].$$

- e. En déduire que le coefficient dominant de P_n est $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.
- 5. Montrer qu'il existe a_n, b_n, c_n tels que $XP_n(X) = a_n P_{n+1}(X) + b_n P_n(X) + c_n P_{n-1}(X)$.
- 6. Montrer que $a_n + b_n + c_n = 1$, puis montrer que $b_n = 0$ à l'aide d'un argument de parité.
- 7. En considérant le coefficient de X^{n+1} , déterminer a_n .
- 8. En déduire que les polynômes de Lagrange satisfont la relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}(X) = (2n+1)XP_n(X) - nP_{n-1}(X).$$

Exercice 11 (Vitesse de convergence des polynômes de Bernstein). Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne, et soit $(B_n[f])_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses polynômes de Bernstein. On reprend les notations de la démonstration du théorème de Weierstrass vue en cours : pour $x \in [0, 1]$, on considère une variable aléatoire S_n de loi $\mathcal{B}(n, x)$, et on pose $X_n := \frac{1}{n} S_n$.

1. Montrer que $|f(x) - B_n[f](x)| \leq K \mathbb{E}[|X_n - x|]$.
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\mathbb{E}[|X_n - x|] \leq \sqrt{\text{Var}(X_n)}$.
3. Conclure que $\|f - B_n[f]\|_\infty \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 12 (Lemme de Lebesgue). Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ des nœuds distincts, Λ_n la constante de Lebesgue associée, et $\mathcal{L}_n$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange associé (voir cours). On considère :

$$\text{dist}(f, \mathbb{R}_n[X]) := \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|_\infty,$$

où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup sur $[a, b]$.

1. Expliquer pourquoi $\text{dist}(f, \mathbb{R}_n[X]) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
2. Justifier que $\mathcal{L}_n[P] = P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer le lemme de Lebesgue :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \|f - \mathcal{L}_n[f]\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \text{dist}(f, \mathbb{R}_n[X]).$$

4. On admet que si les $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont les nœuds de Tchebychev sur $[-1, 1]$, alors $\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \ln(n)$. En utilisant les résultats de l'exercice 11, montrer que si f est Lipschitzienne alors les polynômes d'interpolation de f aux nœuds de Tchebychev convergent uniformément vers f sur $[-1, 1]$.

3 Intégration numérique

Exercice 13 (Formule de Radau). Soient $\xi \in]-1, 1]$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la méthode de quadrature :

$$\forall f \in \mathcal{C}([-1, 1]), \quad J(f) = af(-1) + bf(\xi).$$

1. Déterminer a et b en fonction de ξ pour que cette méthode soit d'ordre 1.
2. Pour $\xi = 1$, quelle méthode reconnaît-on ? est-elle d'ordre 2 ?
3. Déterminer ξ pour que cette méthode soit d'ordre 2. Est-elle d'ordre 3 ?

Exercice 14 (Erreur de la méthode des rectangles gauches). Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, et considérons la subdivision régulière $a_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{N}$, $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

1. Soit $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Montrer que :

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx - hf(a_k) \right| \leq \|f'\|_\infty \frac{h^2}{2}.$$

2. En déduire :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(a_k) \right| \leq \|f'\|_\infty \frac{(b-a)^2}{2N}.$$

3. En considérant la fonction $f(x) = x$, vérifier que cette majoration est optimale.

Exercice 15. Soit $\xi \in]0, 1[$. On considère une méthode de quadrature de la forme :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1]), \quad J(f) = f(0) + \frac{f'(\xi)}{2}.$$

1. Montrer que J est d'ordre 1, quel que soit ξ .
2. Déterminer ξ pour J soit d'ordre 2.

3. Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq N}$ la subdivision régulière de $[0, 1]$ et notons $h = \frac{1}{N}$ le pas. Écrire J_N , la formule de quadrature composite associée à J .
4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3([0, 1])$.
- a. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$P(0) = f(0), \quad P\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right), \quad P'\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right).$$

- b. Posons $\Pi(x) = x\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$, $R(x) = f(x) - P(x)$ et $F_x(t) = R(t)\Pi(x) - R(x)\Pi(t)$. Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \left\{0, \frac{1}{3}\right\}, \quad \exists \xi \in]0, 1[, \quad F^{(3)}(\xi) = 0.$$

- c. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que $f(x) - P(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\Pi(x)$.
- d. Calculer $\int_0^1 \Pi(x) dx$ et en déduire que :

$$\left| \int_0^1 f(x) - P(x) dx \right| \leq \frac{1}{72} \|f^{(3)}\|_\infty.$$

- e. En remarquant que $J(f) = J(P)$ (pourquoi?), en déduire que :

$$|E(f)| \leq \frac{1}{72} \|f^{(3)}\|_\infty.$$

5. Majorer l'erreur de la méthode composite J_N en fonction de $\|f^{(3)}\|_\infty$ et N .

Exercice 16 (Noyau de Peano de la méthode du point milieu). On considère la méthode simple du point milieu sur $[a, b]$:

$$J(f) := (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

- Montrer que J est d'ordre 1.
- En distinguant les cas $t \leq \frac{a+b}{2}$ et $t > \frac{a+b}{2}$, calculer le noyau de Peano d'ordre 1 de J .
- En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - J(f) = f''(\xi) \frac{(b - a)^3}{24}.$$

Exercice 17 (Erreur des méthodes composites).

1. *Théorème de la moyenne discret.* Soient $a \leq b$ deux réels, $f \in \mathcal{C}([a, b])$, des points :

$$a \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq b,$$

et des poids $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in [c_1, c_n]$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \omega_k f(c_k) = f(\xi) \sum_{k=1}^n \omega_k.$$

Indication : considérer la fonction $F(x) = f(x) \sum_{k=1}^n \omega_k$ et utiliser le TVI.

2. On considère une méthode de quadrature simple J , d'ordre p , sur un intervalle de longueur h , dont l'erreur s'écrit (cf. corollaire du cours), pour $f \in \mathcal{C}^{p+1}$:

$$E(f, [a, a + h]) = C h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in]a, a + h[,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante ne dépendant que de la méthode (pas de a , h ni f). Soit J_N la méthode composite associée sur $[a, b]$, à N sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{N}$.

- a. Justifier qu'il existe des nombres $\xi_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tels que l'erreur globale s'écrive :

$$E_N(f, [a, b]) = C h^{p+2} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(p+1)}(\xi_k).$$

b. À l'aide du théorème de la moyenne discret, montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$E_N(f, [a, b]) = C(b-a) h^{p+1} f^{(p+1)}(\xi).$$

3. *Application.* En utilisant la formule d'erreur de la méthode simple des trapèzes vue en cours, retrouver ainsi la formule exacte de l'erreur de la méthode composite des trapèzes :

$$\exists \xi \in]a, b[, \quad \int_a^b f(x) dx - T_N(f, [a, b]) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi).$$

Exercice 18 (Une autre formule pour l'erreur). Soit J une méthode de quadrature d'ordre p sur $[a, b]$. On note K_p son noyau de Peano :

$$K_p(t) := E(h_p) = \int_a^b h_t(x) dx - J(h_t), \quad h_t(x) = (x-t)_+^p = \begin{cases} (x-t)^p & \text{si } x > t, \\ 0 & \text{si } x \leq t. \end{cases}$$

On suppose que K_p est positif. En vous appuyant sur la formule de l'erreur du cours, montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a, b])$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$E(f) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} E(x \mapsto x^{p+1}).$$

4 Méthode à un pas pour les EDO

Dans tous les exercices, on considère une équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ avec $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue globalement Lipschitzienne en espace uniformément en temps, de constante de Lipschitz $L > 0$. On pourra supposer que f est de classe $\mathcal{C}^p$, avec p aussi grand que nécessaire. On considère des temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note $h_n = t_{n+1} - t_n$, $h_{\max} = \max_n h_n$ et $T = t_N - t_0$.

Exercice 19 (Euler explicite). Soit y la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On considère le schéma :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n).$$

avec y_0 une valeur initiale pas nécessairement égale à x_0 .

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors y est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Soit $\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n f(t_n, y(t_n))$ l'erreur de consistance. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$|\varepsilon_n| \leq h_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} |y''(s)| ds.$$

3. On note $e_n = y(t_n) - y_n$ l'erreur de discrétisation.

- a. Montrer que $|e_{n+1}| \leq (1 + Lh_n)|e_n| + |\varepsilon_n|$.
- b. En utilisant la majoration $1 + x \leq e^x$, montrer que :

$$|e_n| \leq e^{L(t_n - t_0)} |e_0| + h_{\max} \int_{t_0}^{t_n} e^{L(t_n - s)} |y''(s)| ds.$$

- c. En déduire que :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq e^{LT} |e_0| + h_{\max} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{L(t_0+T-s)} |y''(s)| ds.$$

4. En déduire que si $y_0 = x_0 + O(h_{\max})$, alors le schéma d'Euler est convergent et $\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| = O(h_{\max})$.

Exercice 20 (Méthode de Crank–Nicolson). On appelle méthode de Crank–Nicolson le schéma numérique :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})).$$

1. Cette méthode est-elle explicite ou implicite?
2. Montrer que la méthode est bien définie si $h_{\max} < \frac{2}{L}$.
3. Montrer que la méthode est consistante.
4. Montrer que la méthode est stable.
5. Conclure que la méthode est convergente.
6. On considère l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ où $\lambda > 0$.
 - a. Écrire la méthode de Crank–Nicolson pour cette équation sous une forme explicite, et montrer qu'elle est bien définie sans condition sur $h_{\max}$.
 - b. Montrer que la méthode est d'ordre 2 sur cet exemple.

Exercice 21. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On considère le schéma numérique :

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \\ \tilde{y}_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(\alpha f(t_n, y_n) + \beta f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, \tilde{y}_{n+\frac{1}{2}}\right) + \gamma f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \right) \end{cases}$$

1. Montrer que c'est une méthode à un pas et donner sa fonction Φ .
2. Montrer que le schéma est stable et donner une constante de stabilité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que le schéma soit consistant.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que le schéma soit d'ordre 2.
5. Ce schéma peut-il être d'ordre 3?
6. Montrer que ce schéma est une méthode RK₃ et donner son tableau de Butcher. En utilisant les résultats du cours sur les méthodes de Runge–Kutta, retrouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 22. Déterminer toutes les méthodes RK₂ explicites et d'ordre 2.

Exercice 23 (θ -méthode). Soit $\theta \in [0, 1]$. On appelle θ -méthode le schéma numérique défini par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[(1-\theta) f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right].$$

C'est une combinaison convexe d'Euler explicite et d'Euler implicite.

1. Pour $\theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, quelles méthodes reconnait-on?
2. Montrer que la θ -méthode est une méthode RK₂, de tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\theta & \theta \\ \hline & 1-\theta & \theta \end{array}$$

3. En déduire que la méthode est consistante.
4. Déterminer θ pour que la méthode soit d'ordre 2.