Analyse 3
L2 MI/MP
2025 – 2026

Devoir surveillé n° 3
Correction

Exercice 1.

1. Pour $x=0$, $f_n(0)=0$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(0)$ converge. Pour $x>0$, on a $f_n(x)\sim\frac{x}{n^2}$ lorsque $n\to+\infty$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge par comparaison des séries à termes positifs.
2. Étudions la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée :
$$f_n'(x)=\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}.$$
On a $f_n'(x)\geq 0$ sur $[0,n]$ et $f_n'(x)\leq 0$ sur $[n,+\infty[$, donc f_n est croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$. Ainsi, f_n atteint son maximum en $x=n$ et celui-ci vaut $f_n(n)=\frac{1}{2n}$. Par conséquent :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sup_{x\geq 0}|f_n(x)|=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2n}.$$
Cette série diverge, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. D'après la question précédente, pour tout $n>A$, f_n est croissante sur $[0,A]$ et son maximum sur cet intervalle est $f_n(A)=\frac{A}{n^2+A^2}$. Par conséquent :
$$\sup_{x\in[0,A]}\left|f_n(x)\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{A}{n^2},$$
donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sup_{x\in[0,A]}|f_n(x)|$ converge. Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $[0,A]$.
4. Les fonctions f_n sont continues sur $[0,A]$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $[0,A]$ (car elle converge normalement), donc la somme S est continue sur $[0,A]$.
Soit $x_0\in\mathbb{R}_+$, alors il existe $A>0$ tel que $x_0\in[0,A[$ (prendre $A=x_0+1$ par exemple). Or S est continue sur $[0,A[$, donc elle est continue en x_0. Ainsi, on a montré que S est continue en tout point $x_0\in\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5.
   a. Notons $S_N=\sum_{n=1}^N f_n$ la somme partielle d'ordre N. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément vers S signifie sur la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers S sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|S(x)-S_N(x)|\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$$
   Or, $S(x)-S_N(x)=R_N(x)$, d'où l'équivalence demandée.

   b. On commence par écrire :
   $$R_N(N)-R_{2N}(N)=\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{N}{n^2+N^2}.$$
   Le terme $\frac{N}{n^2+N^2}$ est décroissant en n, donc il est minimal pour $n=2N$, d'où la minoration :
   $$R_N(N)-R_{2N}(N)\geq\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{N}{(2N)^2+N^2}=\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{N}{5N^2}=\frac{1}{5}.$$

   c. D'après la question précédente :
   $$\frac{1}{5}\leq R_N(N)-R_{2N}(2N)\leq R_N(N)\leq\sup_{x\geq 0}R_N(x),$$
   donc $\sup_{x\geq 0}R_N(x)$ ne tend pas vers 0. Par conséquent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

6. Pour tout $x \geq 0$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le théorème de convergence des séries alternées, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n f_n(x)$ converge pour tout $x \geq 0$. De plus, on a la majoration du reste :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)\right| \leq f_{N+1}(x).$$

Cette fonction a pour maximum $\frac{1}{2(N+1)}$ d'après l'étude de fonction de la question 2, d'où :

$$\sup_{x\geq 0}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2(N+1)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n f_n$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Le système différentiel $(\mathscr{S})$ est équivalent à $X'(t) = AX(t)$ avec A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour valeurs propres[1] $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. La matrice A possède deux valeurs propres réelles distinctes, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Les sous-espaces propres associées sont :

$$E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I) = \mathrm{Vect}(V_i)$$

avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Posons $X(t) = PY(t)$ avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, alors :

$$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = APY(t) \iff Y'(t) = P^{-1}APY(t) \iff Y'(t) = DY(t).$$

Le système différentiel $(\mathscr{S})$ est donc équivalent au système :

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) \end{cases}$$

Ce système admet pour solutions :

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t) = \beta \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les solutions du système $(\mathscr{S})$ sont donc :

$$X(t) = PY(t) = y_1(t)V_1 + y_2(t)V_2 = \alpha \mathrm{e}^{2t}V_1 + \beta \mathrm{e}^{-t}V_2,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} + 2\beta \mathrm{e}^{-t} \\ x_2(t) = -\alpha \mathrm{e}^{2t} - \beta \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

1. obtenues soit en calculant le polynôme caractéristique, soit en remarquant que $\det(A) = -2$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1$, donc le produit des valeurs propres vaut -2 et leur somme vaut 1.