Analyse 3
L2 MI/MP
2025 – 2026

Devoir surveillé n° 3

4 mai 2026

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure 30 minutes (tiers temps : 2 heures).

Barème : 10 points (répartition indicative).

Exercice 1 (8 pts)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note S sa somme.
2. La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$ avec $A > 0$.
4. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. On souhaite montrer que la convergence de la série n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note :
$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x),$$
le reste d'ordre N de la série.
   a. Rappeler la définition de la convergence uniforme de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ vers S sur $\mathbb{R}_+$, et montrer qu'elle équivaut à :
$$\sup_{x\geq 0} |R_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$
   b. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$R_N(N) - R_{2N}(N) \geq \frac{1}{5}.$$
   c. Conclure que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas uniformément vers S sur $\mathbb{R}_+$.
6. On considère à présent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n f_n$. Montrer que cette série converge simplement, puis uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 (2 pts)**.** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) - 6x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases} \qquad (\mathscr{S})$$