Analyse 3
L2 MI/MP
2024 – 2025

Devoir surveillé n° 2
Correction

Exercice 1. Voir cours.

Exercice 2.

1. Pour tout $x > 0$, la suite $\left(\frac{1}{nx+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante et tend vers 0, donc par le critère des séries alternées, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge.
2. La série ne converge pas absolument (par comparaison à la série harmonique), donc elle ne converge normalement sur aucun intervalle non vide.
3. Notons $R_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)$ le reste de la série. Le théorème de convergence des séries alternée nous donne la majoration suivante du reste :
$$|R_N(x)| \leq \frac{1}{Nx+1},$$
donc $\sup_{x>a} |R_N(x)| \leq \frac{1}{Na+1} \to 0$. Par conséquent, la série converge uniformément sur $]a, +\infty[$.
4. Les fonctions f_n sont continues sur $]a, +\infty[$ et la série converge uniformément sur $]a, +\infty[$, donc la somme est continue sur $]a, +\infty[$, pour tout $a > 0$. Par conséquent, f est continue sur $\bigcup_{a>0}]a, +\infty[$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+^*$.
5. Soit $N \in \mathbb{N}$. On calcule les sommes partielles de la série :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{nx+1} &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{nx}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-t^x)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t^x)^{N+1}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{(N+1)x}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Cette dernière intégrale tend vers 0 par encadrement :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(N+1)x}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{(N+1)x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(N+1)x+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$
Ainsi, on a montré que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t.$$
6. On évalue f en $x = 1$ et $x = 2$:
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln 2, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Soit $y \in A$. Par inégalité triangulaire, on a $d(x,A) \le \|x-y\| \le \|x-x'\| + \|x'-y\|$. Ainsi, $d(x,A) - \|x-x'\|$ est un minorant de $\|x'-y\|$ pour tout $y \in A$, donc par définition de l'infimum :

$$d(x,A) - \|x-x'\| \le d(x',A),$$

c'est-à-dire :

$$d(x,A) \le \|x-x'\| + d(x',A).$$

Par symétrie des rôles de x et x', on a aussi $d(x',A) \le \|x-x'\| + d(x,A)$, donc :

$$\left|d(x,A) - d(x',A)\right| \le \|x-x'\|.$$

2. D'après la question précédente, d_A est Lipschitzienne, donc elle est continue.

3. **a.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $\|x-a_n\| \to d(x,A)$. Puisque $\|x-a_n\|$ converge [1], elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x-a_n\| \le M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \overline{\mathscr{B}}(x,M)$, donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque E est de dimension finie, on peut extraire une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite a, et $a \in A$ car A est fermé. On a alors :

$$d(x,A) = \lim_{n\to+\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\| = \|x-a\|.$$

b. La fonction d_A est continue sur le compact K, donc d_A atteint son minimum sur K : il existe $x_0 \in K$ tel que pour tout $x \in K$, $d(x,A) \ge d(x_0,A)$. Par la question précédente, il existe $a_0 \in A$ tel que $d(x_0,A) = \|x_0 - a_0\|$.

Posons $\delta := \|x_0 - a_0\|$. Puisque A et K sont disjoints, $x_0 \neq a_0$ donc $\delta > 0$. Ainsi, on a montré que pour tout $x \in K$, $d(x,A) \ge \delta$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in K, \quad \forall a \in A, \quad \|x-a\| \ge \delta.$$

1. attention, on ne sait rien sur la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.