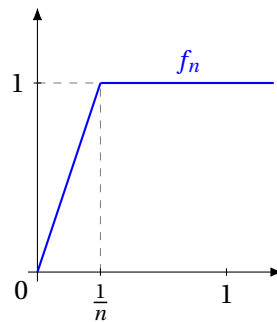


## Devoir surveillé n° 2

### Correction

#### Exercice 1.

1. Représentation de  $f_n$  :



2. Soit  $x_0 \geq 0$ . Si  $x_0 = 0$ , alors  $f_n(x_0) = 0$ , donc la suite  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Si  $x_0 > 0$ , alors pour tout  $n > \frac{1}{x_0}$ ,  $f_n(x_0) = 1$ , donc la suite  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. a. Les fonctions  $f_n$  sont continues, mais la fonction  $f$  n'est pas continue sur  $[0, a]$ . Donc la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ .  
b. Si  $n > \frac{1}{a}$ , alors  $\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(x)| = 0$ , donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, +\infty[$ .

#### Exercice 2.

1. Si  $x_0 = 0$ , alors  $g_n(x_0) = 0$  converge vers 0. Et si  $x_0 > 0$ , alors  $g_n(x_0) \rightarrow 0$  par croissance comparée. Donc  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle.  
2. Une étude de fonction montre que la fonction  $g_n$  est croissante sur  $[0, \frac{1}{n}]$  et décroissante sur  $[\frac{1}{n}, +\infty[$ . Donc elle atteint son maximum en  $\frac{1}{n}$  :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |g_n(x) - 0| = g\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1} \neq 0.$$

La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. Prenons  $I = [1, +\infty[$ . Alors la fonction  $g_n$  est décroissante sur  $I$  d'après ce qui précède, donc :

$$\sup_{x \geq 1} |g_n(x) - 0| = g_n(1) = ne^{-n} \rightarrow 0,$$

par croissance comparée. La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ .

#### Exercice 3.

1.  $K$  est compact dans  $E$  ssi de toute suite dans  $K$ , on peut extraire une sous-suite qui converge vers une limite appartenant à  $K$ .

2. Remarquons que :

$$0 \leq \|u_n - \ell_1\| \leq N(X_n - L) \quad \text{et} \quad 0 \leq \|v_n - \ell_2\| \leq N(X_n - L),$$

donc si  $N(X_n - L) \rightarrow 0$  alors  $\|u_n - \ell_1\| \rightarrow 0$  et  $\|v_n - \ell_2\| \rightarrow 0$ . Réciproquement, si  $\|u_n - \ell_1\| \rightarrow 0$  et  $\|v_n - \ell_2\| \rightarrow 0$ , alors leur somme tend vers 0, c'est-à-dire  $N(X_n - L) \rightarrow 0$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} X_n \rightarrow L &\iff N(X_n - L) \rightarrow 0 \\ &\iff \|u_n - \ell_1\| \rightarrow 0 \text{ et } \|v_n - \ell_2\| \rightarrow 0 \\ &\iff u_n \rightarrow \ell_1 \text{ et } v_n \rightarrow \ell_2. \end{aligned}$$

3. Soit  $X_n = (u_n, v_n) \in K \times K$ . Montrons qu'on peut extraire une sous-suite de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers une limite dans  $K \times K$ .

Puisque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dans  $K$  compact, on peut extraire une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers une limite  $\ell_1 \in K$ . La suite  $(v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est dans  $K$ , donc on peut extraire une sous-suite  $v_{\varphi(\psi(n))}$  qui converge vers  $\ell_2 \in K$ . Or, la suite  $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , donc elle converge encore vers  $\ell_1$ . Finalement, on a obtenu une extraction  $\varphi \circ \psi$  telle que  $u_{\varphi(\psi(n))} \rightarrow \ell_1 \in K$  et  $v_{\varphi(\psi(n))} \rightarrow \ell_2 \in K$ , donc  $X_{\varphi(\psi(n))} \rightarrow (\ell_1, \ell_2) \in K \times K$  d'après la question précédente.

4. Réponse 1. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, soit  $(x_n, y_n) \in K \times K$  tel que :

$$\|x_n - y_n\| \rightarrow \text{diam}(K).$$

Puisque  $K \times K$  est compact, on peut extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$  qui converge vers une limite  $(a, b) \in K \times K$ . Par continuité de la norme, on a alors  $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \rightarrow \|a - b\|$ . Enfin, par unicité de la limite,  $\|a - b\| = \text{diam}(K)$ .

Réponse 2. Soit  $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie pour tout  $(x, y) \in K \times K$  par  $f(x, y) = \|x - y\|$ . La fonction  $f$  est continue<sup>1</sup> sur  $K \times K$  qui est compact d'après la question précédente, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur  $K \times K$  :

$$\exists (a, b) \in K \times K, \quad f(a, b) = \max_{(x, y) \in K \times K} f(x, y),$$

c'est-à-dire :

$$\exists (a, b) \in K \times K, \quad \|a - b\| = \max_{(x, y) \in K \times K} \|x - y\| = \text{diam}(K).$$

---

1. Posons  $g: E \times E \rightarrow E$  la fonction définie par  $g(x, y) = x - y$ . La fonction  $g$  est continue de  $(E \times E, N)$  dans  $(E, \|\cdot\|)$  car elle est Lipschitzienne :

$$\|g(x, y) - g(x', y')\| = \|(x - y) - (x' - y')\| = \|x - x' + y' - y\| \leq \|x - x'\| + \|y' - y\| = N((x - x', y - y')) = N((x, y) - (x', y')).$$

Par conséquent,  $f$  est continue sur  $E \times E$ , car composée de fonctions continues ( $g$  est continue et la norme  $\|\cdot\|$  est continue).