

## Devoir surveillé n° 2

### 3 avril 2026

---

#### Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

**Durée :** 1 heure 15 minutes (tiers temps : 1 heure 40 minutes).

**Barème :** 10 points (répartition indicative).

---

**Exercice 1** (3 pts). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \geq 0, \quad f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[ \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Représenter  $f_n$ .
2. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers une fonction  $f$  que vous déterminerez.
3. Soit  $a > 0$ . La convergence est-elle uniforme :
  - a. sur  $[0, a]$  ?
  - b. sur  $[a, +\infty[$  ?

**Exercice 2** (4 pts). Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \geq 0, \quad g_n(x) = nx e^{-nx}.$$

1. Montrer que  $(g_n)$  converge simplement vers une fonction  $g$ .
2. La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$  ?
3. Donner, en justifiant, un intervalle  $I$  (non réduit à un point) tel que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ .

**Exercice 3** (3 pts). Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On définit sur  $E \times E$  une norme  $N$  par :

$$\forall X = (u, v) \in E \times E, \quad N(X) = \|u\| + \|v\|.$$

On admet que  $(E \times E, N)$  est un espace vectoriel normé. Dans la suite, on fixe  $K$  un compact de  $E$ .

1. Rappeler la définition de «  $K$  est un compact de  $E$  ».
2. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E \times E$ , avec  $X_n = (u_n, v_n)$ , et soit  $L = (\ell_1, \ell_2) \in E \times E$ . Montrer que :

$$X_n \rightarrow L \iff u_n \rightarrow \ell_1 \text{ et } v_n \rightarrow \ell_2.$$

3. Montrer que  $K \times K$  est un compact de  $E \times E$ .
4. On appelle diamètre de  $K$  le réel :

$$\text{diam}(K) = \sup_{(x,y) \in K \times K} \|x - y\|.$$

Montrer qu'il existe  $a \in K$  et  $b \in K$  tels que  $\text{diam}(K) = \|a - b\|$ .