Analyse 3
L2 MI/MP
2025 – 2026

Devoir surveillé n° 1

Correction

Exercice 1.

1. $\mathring{A} =]0,1[$ et $\overline{A} = A \cup \{2\}$.
2. $B = f^{-1}(]1,+\infty[)$ avec f la fonction définie par $f(x,y) = xy$. Puisque f est continue et $]1,+\infty[$ est ouvert, alors B est ouvert.
3. On peut prendre par exemple $u_n = ((-1)^n, 0)$.

Exercice 2.

1. Soient $x, y \in E$. On a par inégalité triangulaire $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$, donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. On montre de même que $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$, d'où $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$.
2. D'après la question précédente, f est Lipschitzienne, donc elle est continue.
3. **a.** Soient $x, y \in A$. Puisque $A \subset B$, x et y appartiennent à B donc $\|x-y\| \leq \mathrm{diam}(B)$. Ainsi, $\mathrm{diam}(B)$ est un majorant de l'ensemble $\{\|x-y\| : x, y \in A\}$, il est donc plus grand que sa borne supérieure, c'est-à-dire $\mathrm{diam}(B) \geq \mathrm{diam}(A)$.

   b. On a $A \subset \overline{A}$, donc $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\overline{A})$ d'après la question précédente.

   Montrons l'inégalité contraire. Soient $a, b \in \overline{A}$, il existe deux suite (a_n) et (b_n) dans A telles que $a_n \to a$ et $b_n \to b$. Par continuité de la norme, on a $\|a_n - b_n\| \to \|a-b\|$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|a_n - b_n\| \leq \mathrm{diam}(A)$ car $a_n, b_n \in A$, donc c'est aussi vrai pour la limite : $\|a-b\| \leq \mathrm{diam}(A)$. Ceci étant vrai pour tout $a, b \in \overline{A}$, on a montré que $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$.

   Ainsi, on a montré que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

   Réponse alternative. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{A}$ tels que :

   $$\mathrm{diam}(\overline{A}) - \varepsilon \leq \|\bar{a} - \bar{b}\| \leq \mathrm{diam}(\overline{A}).$$

   Puisque $\bar{a}, \bar{b}$ appartiennent à l'adhérence de A, il existe $a, b \in A$ tels que $\|\bar{a} - a\| \leq \varepsilon$ et $\|\bar{b} - b\| \leq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a :

   $$\|\bar{a} - \bar{b}\| \leq \|\bar{a} - a\| + \|a - b\| + \|b - \bar{b}\| \leq \mathrm{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

   Par conséquent, $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A) + 3\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on fait tendre ε vers 0 et on obtient que $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$.

   c. D'après la question précédente, il revient au même de le montrer pour la boule fermée.

   Commençons par remarquer que si $x, y \in \overline{\mathscr{B}}(0_E, r)$, alors $\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2r$. Par conséquent, $\mathrm{diam}(\overline{\mathscr{B}}(0_E, r)) \leq 2r$.

   Montrons qu'il existe des vecteurs dans $\overline{\mathscr{B}}(0_E, r)$ pour lesquels c'est une égalité. Puisque $E \neq \{0_E\}$, il existe $v \in E$ tel que $v \neq 0_E$. Posons $u = \frac{r}{\|v\|} v$, alors $\|u\| = r$. Ainsi, $u \in \overline{\mathscr{B}}(0_E, r)$, de même pour $-u$. On a alors $\|u - (-u)\| = 2\|u\| = 2r$.

   Ainsi, on a montré que $\mathrm{diam}(\overline{\mathscr{B}}(0_E, r)) = 2r$.

Exercice 3.

1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = N(A)^2 \|x\|^2.$$

   Donc $\|Ax\| \leq N(A)\|x\|$.

2. Soit x un vecteur propre associé à λ, c'est-à-dire $Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$. On applique l'inégalité précédente :

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq N(A) \|x\|.$$

Or $\|x\| > 0$ car $x \neq 0_E$, donc en divisant on obtient $|\lambda| \leq N(A)$.

3. Si λ est une valeur propre de A, alors λ^k est une valeur propre de A^k (pour le même vecteur propre). On applique l'inégalité précédente : $|\lambda|^k \leq N(A^k)$. Or $N(A^k) \to 0$ par hypothèse, donc $|\lambda|$ ne peut pas être supérieure ou égale à 1.