

Devoir surveillé n° 1

6 mars 2026

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure 15 min (tiers temps : 1 heure 40 minutes).

Barème : 10 points.

Exercice 1 (3 pts).

1. Soit $A = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup [0, 1] \cup \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Représenter A , puis donner son intérieur et son adhérence (on ne demande pas de justification).
2. Montrer que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$ est ouvert dans \mathbb{R}^2 .
3. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}^2 telle que $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, mais $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (pour la norme de votre choix).

Exercice 2 (4 pts). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose que $E \neq \{0_E\}$.

1. Démontrer à partir de l'inégalité triangulaire que $\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.
2. En déduire que l'application $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|$ est continue sur E .
3. Soit A une partie bornée et non vide de E . On appelle diamètre de A la quantité :

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

- a. Soit B une partie bornée de E . Montrer que si $A \subset B$, alors $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
- b. Montrer que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.
- c. Soit $r > 0$, montrer que $\text{diam}(\mathcal{B}(0_E, r)) = 2r$.

Indication : considérer un vecteur u tel que $\|u\| = r$ (justifier qu'un tel vecteur existe).

Exercice 3 (3 pts). Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la norme N suivante :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On munit \mathbb{R}^n de la norme euclidienne $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. On identifiera les vecteurs de \mathbb{R}^n à des matrices colonnes. Dans cet exercice, on fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\| \leq N(A)\|x\|$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n .

Vous pouvez admettre cette question pour faire les suivantes.

2. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A , alors $|\lambda| \leq N(A)$.
3. En déduire que si $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} O_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A , alors $|\lambda| < 1$.