Analyse 3
L2 MI/MP
2024 – 2025

Devoir surveillé n° 1

13 mars 2025

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure (tiers temps : 1 heure 20 minutes).

Barème : 20 points.

Exercice 1 (4 pts)**.** *Questions de cours.* Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition de « A est une partie ouverte de E ».
2. Écrire la définition de « x est adhérent à A ».

Exercice 2 (4 pts)**.**

1. Dans $\mathbb{R}$, donner l'intérieur et l'adhérence de $A := \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup [0, 1[$ *(aucune justification n'est attendue).*
2. Dans $\mathbb{R}^2$, démontrer que l'ensemble $B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy > 1 \text{ ou } \sin(x - y) < 0\right\}$ est ouvert.

Exercice 3 (6 pts)**.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est Lipschitzienne s'il existe $K > 0$ tel que $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$.

1. Démontrer que si $f : E \to F$ est Lipschitzienne, alors f est continue.
2. On suppose à présent que $f : E \to F$ est linéaire et continue. On va démontrer que f est nécessairement Lipschitzienne.
   - **a.** Écrire la définition de « f est continue en 0_E ».
   - **b.** En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in E$, $\|u\|_E \leq \delta \implies \|f(u)\|_F \leq 1$.
   - **c.** En déduire que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E$.
     Indication : si $x \neq 0_E$, on pourra considérer le vecteur $u = \delta \frac{x}{\|x\|_E}$.
   - **d.** Démontrer que f est Lipschitzienne.

Exercice 4 (6 pts)**.** L'objectif de cet exercice est de démontrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que si A est ouverte et fermée, alors $\partial A = \varnothing$.
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que A et A^c soient non vides. Soient $a \in A$ et $b \in A^c$. Sans perte de généralité, on suppose que $a < b$. On pose $s := \sup\left(A \cap [a, b]\right)$.
   - **a.** Montrer que $s \in \overline{A}$.
   - **b.** Montrer que $s \in \overline{A^c}$ (on distinguera les cas $s = b$ et $s < b$).
   - **c.** En déduire que $\partial A \neq \varnothing$.
3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Démontrer que si A est ouverte et fermée, alors $A = \mathbb{R}$ ou $A = \varnothing$.