Algèbre linéaire 1
L1 MIPI 2024 – 2025

Livret d'exercices

Les questions marquées par une étoile $\star$ sont des questions d'approfondissement qui ne seront pas au programme de l'évaluation.

1 Nombres complexes

1.1 Forme algébrique

Exercice 1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants, et donner leur partie réelle et imaginaire.

1. $z_1 := -4 + 7\mathrm{i} - (2 + 4\mathrm{i})$.
2. $z_2 := \mathrm{i}(3 + 2\mathrm{i}) - 1 + 3\mathrm{i}$.
3. $z_3 := (2 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$.
4. $z_4 := (2 - 5\mathrm{i})(-5 + 2\mathrm{i})$
5. $z_5 := (4 - 3\mathrm{i})^2$.
6. $z_6 := (2 - \mathrm{i})^3$.
7. $z_7 := (a + \mathrm{i}b)^2$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $z_8 := (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient a et b des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$.
2. Quel est la forme algébrique de l'inverse de i ?

Exercice 3. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 := \dfrac{2}{\mathrm{i}}$.
2. $z_2 := \dfrac{2-\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$.
3. $z_3 := \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$.
4. $z_4 := \dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.
5. $z_5 := \dfrac{2}{2+\frac{1}{1+\mathrm{i}}}$
6. $z_6 := \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

Exercice 4.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2\mathrm{i}z + z + 1 = 2z - 4\mathrm{i} - 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 - \mathrm{i}z_2 = -2 - 3\mathrm{i} \\ 2z_1 + (1 - \mathrm{i})z_2 = 3 - 5\mathrm{i}. \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Calculer i^2, i^3 et i^4.
2. En déduire la valeur de i^n en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.
3. Calculer la somme :

$$S := \sum_{k=0}^{2024} \mathrm{i}^k.$$

Exercice 6. Calculer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := -3 + 4\mathrm{i}$,
2. $z_2 := \dfrac{1}{3} - \dfrac{\mathrm{i}}{6}$,
3. $z_3 := -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$,
4. $z_4 := \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$,
5. $z_5 := \sqrt{3} + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$,
6. $z_6 := \dfrac{1-3\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$.

Exercice 7. Montrer que les nombres suivants sont réels sans calculer le produit des quatre facteurs :

1. $z := (2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$,

2. $w := (1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$.

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ et soit $Z := \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et soit $Z := \dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}$. On note $z = x + \mathrm{i}y$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble $E := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid Z \in \mathbb{R}\}$.

3. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble $F := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\}$.

Exercice 10. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions des équations ci-dessous.

1. $(1+2\mathrm{i})z - 3 + 5\mathrm{i} = 0$.

2. $2z + 3\overline{z} = 5$.

3. $\overline{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$.

4. $2z + 6\overline{z} = 3 + 2\mathrm{i}$.

5***.** $z^2 = |z|$.

6***.** $|z| = |1-z| = \frac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.

Exercice 11.

1. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(z) \leq |\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ et $\mathfrak{Im}(z) \leq |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$.

2. Montrer que $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$.
Indication : on rappelle que $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.

3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$.

4. En déduire que $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| = |z| + |w| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z = \lambda w$.

Exercice 12. Soient z et w des nombres complexes.

1. Montrer que $|z| \leq |z-w| + |w|$.

2. En déduire que $|z-w| \geq \Big||z| - |w|\Big|$.

3. Soit $k \in]0,1[$. Montrez que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq k \implies 1-k \leq |1+z| \leq 1+k$.

4***.** En faisant un dessin, déterminer les cas d'égalité.

Exercice 13.

1. Établir l'identité du parallélogramme :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big).$$

2***.** Montrer la formule de polarisation :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad zw = \frac{1}{4}\Big(\big|z+\overline{w}\big|^2 - \big|z-\overline{w}\big|^2 + \mathrm{i}\big|z+\mathrm{i}\overline{w}\big|^2 - \mathrm{i}\big|z-\mathrm{i}\overline{w}\big|^2\Big).$$

Exercice 14. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := -7$.

2. $z_2 := 5 - 12\mathrm{i}$.

3. $z_3 := -3 - 4\mathrm{i}$.

4. $z_4 := 8\mathrm{i}$.

Exercice 15. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions des équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2. $z^2 + (4-6\mathrm{i})z = 5 + 14\mathrm{i}$.

3. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

4. $z^4 = 1$.

5. $z^4 - (5-14\mathrm{i})z^2 - 2(5\mathrm{i}+12) = 0$.

6. $z^4 + z^2 + 3\mathrm{i} = 1$.

Exercice 16*. Déterminer et interpréter géométriquement l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{3z+4}{3z+8\mathrm{i}}\right| = 1.$
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
3. $z^2 - \overline{z} \in \mathbb{R}.$
4. $\dfrac{z-3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+2} \in \mathbb{R}.$

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^2 - 2\mathrm{i}}{z\overline{z}+1}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 4\mathrm{i}$.
3. En déduire que $f(z)$ est réel si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = \lambda + \frac{1}{\lambda}\mathrm{i}$.
4. Montrer que $f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda(1+\mathrm{i})$ ou $z = \lambda(1-\mathrm{i})$.

Exercice 18. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère le polynôme :

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

1. Exprimer en fonction de $y \in \mathbb{R}$ les parties réelles et imaginaires de $f(\mathrm{i}y)$.
2. En déduire les solutions imaginaires pures de l'équation $f(z) = 0$.
3. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = (z^2+9)(z^2+az+b)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 19*. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $4z^2 + 8|z| - 3 = 0.$
2. $z^2 + \overline{z} - 1 = 0.$
3. $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1).$

1.2 Forme trigonométrique

Exercice 20.

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
   - **a.** $z_1 := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
   - **b.** $z_2 := \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   - **c.** $|z_3| = 7$ et $\arg(z_3) \equiv \frac{\pi}{6} \ (2\pi)$
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
   - **a.** $z_1 := 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$
   - **b.** $z_2 := -4$
   - **c.** $z_3 := \mathrm{i} - 1$
   - **d.** $z_4 := 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}\sqrt{3}).$
   - **e.** $z_5 := \frac{-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$
   - **f*.** $z_6 := \sin(2) + \mathrm{i}\cos(2).$

Exercice 21. Mettez sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 := \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^8.$
2. $z_2 := \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^6.$
3. $z_3 := (-1+\mathrm{i})^{100}.$
4. $z_4 := \left(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\right)^{200}.$

Exercice 22. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

1. $E_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+2\mathrm{i}| = 3\right\}.$
2. $E_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} \bmod \frac{\pi}{2}\right\}.$
3. $E_3 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 4\right\}.$
4. $E_4 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-i|\right\}.$

Exercice 23. Soit $z_1 := 1+\mathrm{i}$ et $z_2 := \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1. Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.
2. Donner les formes algébrique et trigonométrique du produit $z_1 z_2$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, et les mettre sous forme trigonométrique.

1. $z := -e^{i\theta}$.

2. $w := i\,e^{i\theta}$.

Exercice 25. Soit $z_1 := 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_2 := 2 - 2i\sqrt{3}$.

1. **a.** Déterminer la forme trigonométrique des nombres z_1 et z_2.
b. En déduire les racines carrées complexes de z_1 et de z_2 sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

2. **a.** Déterminer les nombres complexes Z qui sont solutions de l'équation $Z^2 - 4Z + 16 = 0$.
b. En déduire les nombres complexes z qui sont solutions de l'équation $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

Exercice 26. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :

a. $\cos^2(\theta)$.
b. $\sin^3(\theta)$.
c⋆. $\sin^4(\theta)$.
d⋆. $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$.

2. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

a. $\cos(2\theta)$.
b. $\sin(3\theta)$.
c⋆. $\cos(3\theta)\sin(4\theta)$.
d⋆. $\sin(6\theta)$.

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la somme $E_n := \sum_{k=0}^{n} e^{i(\varphi + k\theta)}$.

2. En déduire la valeur des sommes :

a. $C_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\theta)$.

b. $S_n := \sum_{k=0}^{n} \sin(\varphi + k\theta)$.

c⋆. $T_n := \sum_{k=0}^{n} \cos^2(\varphi + k\theta)$.

Exercice 28. Soient $\theta, \varphi \in \left]-\pi, \pi\right[$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := 1 + e^{i\theta}$.

2. $z_2 := e^{i\theta} + e^{i\varphi}$.

3. $z_3 := i\,e^{i\theta} - e^{i\varphi}$.

Indication : factorisation de l'angle moitié.

Exercice 29. Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{U}$ tel que $zw \neq -1$, on a $\frac{z+w}{1+zw} \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que l'argument principal de z appartienne à $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$. Calculer le module et un argument de :

$$\frac{1+z^3}{z^2}.$$

1.3 Racines n-ièmes

Exercice 31. Déterminer les racines quatrièmes et sixièmes des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := 1$.

2. $z_2 := i$.

3. $z_3 := -1 + i$.

4. $z_5 := \dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}$.

Exercice 32. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les nombres $w \in \mathbb{C}$ qui sont solutions de l'équation $w^2 - 2\sin(\theta)\,w + 1 = 0$.

2. En déduire les nombres $z \in \mathbb{C}$ qui sont solutions de l'équation $z^{2n} - 2\sin(\theta)z^n + 1 = 0$.

Exercice 33. Soit $\omega := e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\omega + \omega^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\omega^2 + \omega^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

2. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

4. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 34. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

2*. Calculer $S := \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k$. *Indication : calculer $S - \omega S$.*

Exercice 35*. Soit $\mathrm{j} := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

2. Montrer que $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

3. Développer $(1+\mathrm{j})^n$ et $(1+\mathrm{j}^2)^n$.

4. Calculer une forme exponentielle de $1+\mathrm{j}$ et de $1+\mathrm{j}^2$.

5. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{3k} = \frac{8^n + 2(-1)^n}{3}.$$

2 Systèmes linéaires

Exercice 36. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire :

$$\begin{cases} -3x - 2y - z + 2t = -1 \\ \qquad 4y + z - t = 0 \\ \qquad\qquad z + t = 0 \\ \qquad\qquad\quad 2t = -4. \end{cases}$$

Exercice 37. On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} -x \quad + 3z + 3t \quad = 0 \\ \qquad - 2z + 3t \quad = 2 \\ 4x - y - z + 2t + s = -1. \end{cases}$$

1. En changeant l'ordre des équations et des variables, écrire le système sous une forme échelonnée.

2. Que vaut le rang de ce système ?

3. Déterminer une description paramétrique de l'ensemble des solutions du système.

Exercice 38. Résoudre l'équation $2y - z + 3t = 1$ dont les inconnues sont $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 39. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants par la méthode du pivot du Gauss.

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y = -1 \\ \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{5}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 2x + y - 2z = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 3y - z = -2 \\ x + y - 3z = -1 \\ -x + 2y \qquad = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ x - 2y + 3z = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8. \end{cases}$

Exercice 40. Discuter l'existence et l'unicité des solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x - \quad y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - \quad y - z = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx + \quad y + \quad z = 1 \\ \quad x + my + \quad z = 1 \\ \quad x + \quad y + mz = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \quad x + \quad y + (2m-1)z = 1 \\ mx + \quad y + \qquad\quad z = 1 \\ \quad x + my + \qquad\quad z = 3(m+1). \end{cases}$

3 Espaces vectoriels

3.1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 41. Soit $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$. Vérifier que H est stable pour l'addition. Montrer que H n'est pas un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Exercice 42. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 0\}$.

2. $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 3\}$.

3. $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = 3y\}$.

4. $D := \{(2\lambda,\ \lambda,\ -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5. $E := \{(\lambda - \mu,\ 2\lambda,\ \lambda + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

6. $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 - z = 0\}$.

7. $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 3y^2 - z^2 = 0\}$.

8. $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + 4z = 0\}$.

9. $I := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$.

10. $J := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\}$.

Exercice 43. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 44★. Parmi les ensembles suivants, établir lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $A := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$.

2. $B := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 3\}$.

3. $C := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0)f(1) = 0\}$.

4. $D := \left\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$.

5. $E := \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f' + 2f = 0\}$.

Exercice 45★. Dans l'espace vectoriel E des suites réelles, déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. L'ensemble des suites convergentes.

2. L'ensemble des suites divergentes.

3. L'ensemble des suites croissantes.

4. L'ensemble des suites géométriques.

5. L'ensemble des suites ayant un nombre infini de termes non nuls.

6. L'ensemble des suites ayant un nombre fini de termes non nuls.

7. L'ensemble des suites stationnaires (c.-à-d. constantes à partir d'un certain rang).

3.2 Familles libres, familles génératrices

Exercice 46.

1. Montrer que la famille (u,v) est libre dans $\mathbb{R}^2$ si $u := (1,2)$ et $v := (2,3)$.

2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec $u := (1,2,3)$ et $v := (2,3,4)$.

3. Montrer que la famille (u,v,w) est libre dans $\mathbb{R}^3$ si $u := (1,-1,2)$, $v := (1,1,1)$ et $w := (2,-2,1)$.

Exercice 47. Soient $u := (2,3)$, $v := (-1,4)$, $w := (5,3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la famille (u, v, w) est liée et déterminer une relation de liaison.
2. Montrer que la famille (u, v, w) est génératrice.

Exercice 48. Soient $u := (1,-1,4)$, $v := (2,5,-1)$ et $w := (3,0,-4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Dire si la famille (u, v, w) est libre ou liée.

Exercice 49. Soient $u := (1,2)$, $v := (1,3)$ et $w := (1,4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les vecteurs u, v, w sont deux-à-deux libres.
2. La famille (u, v, w) est-elle libre ?

Exercice 50. Dans $\mathbb{R}^3$, considère les vecteurs $u := (1,-2,2)$ et $v := (3,3,-1)$.

1. Justifier que les vecteurs u et v sont libres.
2. Déterminer si le vecteur $(-1,-7,5)$ est une combinaison linéaire de u et v.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y, z pour que $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(u, v)$.
4. En déduire une équation cartésienne du plan engendré par u et v.

Exercice 51. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Montrer que la famille $(s_1, \dots, s_n)$ est libre, où $s_k := u_1 + \dots + u_k$.

Exercice 52*. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre.
2. Montrer que la famille $(\cos, \sin, f)$ est liée, où $f(x) := \sin(x+1)$, et donner une relation de liaison.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre, où $f_n(x) := \cos(nx)$.

3.3 Bases et dimension

Exercice 53. Soit $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en déterminer une base.

Exercice 54. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants (on ne demande pas de montrer que ce sont des s.e.v.).

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.
2. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + y + t = 0\}$.
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - z + 3t = 0\}$.

Exercice 55. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

Exercice 56. Dans chaque cas, montrer que les vecteurs (u_1, u_2, u_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer les coordonnées du vecteur $v := (1,-1,0)$ dans cette base.

1. $u_1 := (1,0,0)$, $u_2 := (0,1,0)$ et $u_3 := (0,0,1)$.
2. $u_1 := (1,0,0)$, $u_2 := (1,1,0)$ et $u_3 := (1,1,1)$.
3. $u_1 := (1,1,2)$, $u_2 := (-1,2,1)$ et $u_3 := (1,-1,-1)$.

Exercice 57. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 := (1,2,0,3)$ et $u_2 := (1,0,0,-1)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre.
2. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 58. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F := \mathrm{Vect}(u, v, w)$ où $u := (1,1,-1,1)$, $v := (0,2,-1,2)$ et $w := (-2,-3,1,-1)$, et soit H le sous-espace vectoriel :

$$H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0\}.$$

1. Montrer que u, v et w sont linéairement indépendants.

2. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

3. En déduire que $F = H$.

Exercice 59⋆. Soit $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et soit F l'ensemble :

$$F := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soient $a_n := (-2)^n$ et $b_n := 3^n$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des vecteurs de F.

3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre.

4. L'objectif de cette question est de montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de F. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n := \lambda a_n + \mu b_n.$$

- **a.** Expliquer pourquoi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
- **b.** Montrer qu'il existe des valeurs de λ et μ pour lesquelles $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
- **c.** Pour ces valeurs de λ et μ, démontrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n$.
- **d.** En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de F.

5. Quelle est la dimension de F ?

6. Déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Cette suite est-elle unique ?

3.4 Somme de sous-espaces, supplémentaires

Exercice 60. Dans $\mathbb{R}^4$, soit F le plan vectoriel dirigé par $u_1 := (2,3,0,1)$ et $u_2 := (-1,2,1,-2)$ et soit G le plan vectoriel dirigé par $v_1 := (4,-1,-2,5)$ et $v_2 := (1,0,0,0)$.

1. Déterminer une base de $F + G$.

2. La somme est-elle directe ?

Exercice 61. Dans $\mathbb{R}^3$, soient F le plan d'équation $x + y + z = 0$ et G le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

2. Sans déterminer $F \cap G$, justifier si F et G sont supplémentaires.

Exercice 62. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\right\}, \qquad G := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\right\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et de G.

2. Déterminer $F \cap G$.

3. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 63⋆. Soit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit F le sous-espace vectoriel :

$$F := \left\{f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\},$$

et soit G le sous-espace vectoriel des fonctions constantes.

1. Vérifier que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 64. Soit E un espace vectoriel et soient F et G des s.e.v. de dimension finie de E. Notons $\mathscr{B}_F := (u_1, \ldots, u_p)$ une base de F et $\mathscr{B}_G := (v_1, \ldots, v_q)$ une base de G. Montrer que si $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est libre, alors F et G sont en somme directe.

Exercice 65. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E. Démontrer par récurrence sur p que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geq n - p.$$

Exercice 66. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G, H des s.e.v. de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. A-t-on l'inclusion contraire en général ?
2. Montrer que :

$$\dim(F+G+H) \leq \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).$$

Exercice 67*. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F_1 et F_2 des s.e.v. tels que $F_1 + F_2 = E$. Démontrer qu'il existe des s.e.v. $G_1 \subset F_1$ et $G_2 \subset F_2$ tels que $G_1 \oplus G_2 = E$.

3.5 Exercices tirés d'examens

Exercice 68 (Examen 2021-2022, session 1)**.** Soient F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x = 0 \text{ et } y = z\right\}, \quad G_m = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,0), (1,0,m,0)\big),$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Résoudre le système à quatre inconnues x, y, z, t : $\begin{cases} x = 0 \\ y = z. \end{cases}$
3. En déduire une base de F (en justifiant).
4. Donner la dimension de F.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que F et G_m soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 69 (Examen 2022-2023, session 1)**.** Soient $u_{\alpha,\beta} = (\alpha - \beta, \alpha + 2\beta, \beta)$ et $v = (-2, 7, 3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, avec α et β des paramètres réels.

1. Écrire $u_{\alpha,\beta}$ comme une combinaison linéaire $\alpha w_1 + \beta w_2$, en précisant qui sont les vecteurs fixes w_1 et w_2 de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille (w_1, w_2) est-elle libre ?
3. Montrer que $(u_{\alpha,\beta}, v)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $3\alpha - \beta = 0$.
4. Montrer que la somme $\mathrm{Vect}(v) + \mathrm{Vect}(w_2)$ est directe. Que vaut $\dim \mathrm{Vect}(v, w_2)$?
5. Montrer que la somme $\mathrm{Vect}(v) + \mathrm{Vect}(w_1) + \mathrm{Vect}(w_2)$ n'est pas directe. Que vaut sa dimension ?

4 Applications linéaires

Exercice 70. Parmi les applications ci-dessous, déterminer lesquelles sont linéaires.

1. $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f_1(x, y) := (y,\ x + y)$.
2. $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_2(x, y, z) := (2y + z,\ x + z,\ -x + y + z)$.
3. $f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_3(x, y, z) := (y + 1,\ x + y,\ z - x)$.
4. $f_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_4(x, y, z) := (y,\ x + y,\ x^2)$.
5. $f_5 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_5(x, y, z) := (x - 2y + z,\ 2y,\ z - x,\ z - y)$.
6. $f_6 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_6(x, y, z) := (x,\ x + y,\ xz)$.
7. $f_7 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_7(x) := \big(x \sin(2023),\ \frac{x}{\pi},\ x\sqrt{2}\big)$.

Exercice 71. Soient f et g les applications définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) := \overline{z}$ et $g(z) := \mathfrak{Re}(z)$. Les applications f et g sont-elles $\mathbb{R}$–linéaires ? $\mathbb{C}$–linéaires ?

Exercice 72***.** Dans chaque cas, dire si l'application $f\colon E \to F$ est linéaire.

1. $E := \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := u(0)$.
2. $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $F := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et pour tout $u \in E$, $f(u)\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := \max\limits_{t\in[0,1]} u(t)$.
4. $E := \{u \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
5. $E := \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}^3$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := \big(u(0), u'(0), \frac{1}{2}u''(0)\big)$.

Exercice 73. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + z + t = a \\ x + 2z - t = b \\ x + y + 3z - 3t = c. \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_{a,b,c})$$

Posons $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) := (x - y + z + t,\ x + 2z - t,\ x + y + 3z - 3t).$$

1. Échelonner le système $(\mathscr{S}_{a,b,c})$ par la méthode du pivot de Gauss.
2. En déduire une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que le système $(\mathscr{S}_{a,b,c})$ soit compatible.
4. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?
5. Vérifier la validité du théorème du rang sur cet exemple.

Exercice 74. Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) := (x + 2y + 2t,\ -x + y + z,\ 2x + y + z + t).$$

1. À l'aide du théorème du rang, montrer sans calculs que f n'est pas injective.
2. Déterminer une base de $\ker f$.
3. En déduire que f est surjective.

Exercice 75***.** Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soient les $\mathbb{R}$–espaces vectoriels $E := \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $F := \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On considère l'application $\mathscr{D}\colon E \to F$ qui à tout $f \in E$ associe sa dérivée $f' \in F$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker\mathscr{D}$. L'application $\mathscr{D}$ est-elle injective ?
3. Montrer que $\mathscr{D}$ est surjective.

Exercice 76.

1. Existe-t-il des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?
2. Existe-t-il des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer une condition nécessaire sur les entiers n et p pour qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ soit :

   a. injective. **b.** surjective. **c.** bijective.

Exercice 77. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) := (x - 2y + 3z,\ 4x + y + z,\ x + 2y - 2z).$$

Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 78 (Examen 2023-2024, session 2)**.** On considère l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad f(x) = (-3x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4\,;\ x_1 - x_2 + 3x_4\,;\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4).$$

1. Soit $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}$. Échelonner le système linéaire suivant d'inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = y_1 \\ \quad x_1 - \ \, x_2 \qquad + 3x_4 = y_2 \\ \ \ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = y_3. \end{cases} \tag{$\mathscr{S}_y$}$$

2. En déduire une base de $\ker f$. Celle-ci sera formée de deux vecteurs qu'on notera u_1 et u_2.

3. En déduire que $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de celui-ci.

4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

5. Montrer que $\operatorname{Im} f = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$.

6. **a.** Justifier, sans les calculer, qu'il existe $u_3, u_4 \in \mathbb{R}^4$ tels que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer des vecteurs u_3 et u_4 satisfaisant la proposition de la question précédente.

c. On pose $S = \operatorname{Vect}(u_3, u_4)$. Montrer que S et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

d. Notons $g\colon S \to \operatorname{Im} f$ la restriction de f à S, c'est-à-dire g est définie sur S par :

$$\forall x \in S, \quad g(x) = f(x).$$

Montrer que $\ker g = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, puis en déduire que g est un isomorphisme entre S et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 79. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

2. Soit $f\colon E \to F$ un isomorphisme et soit $f^{-1}\colon F \to E$ son application réciproque. Montrer que f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Exercice 80*. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Si $g \in \mathscr{L}(G,E)$ est surjective, montrer que $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(f)$.

2. Si $h \in \mathscr{L}(F,G)$ est injective, montrer que $\operatorname{rg}(h \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

Exercice 81*. L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule de Grassmann à partir du théorème du rang.

1. Soient $(F, +_F, \cdot_F)$ et $(G, +_G, \cdot_G)$ des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels. On définit l'*espace vectoriel produit* de F et G comme l'ensemble $F \times G$ muni des lois $+$ (interne) et $\cdot$ (externe) définies ci-dessous :

$$\forall (u,v), (u',v') \in F \times G, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (u,v) + (u',v') := (u +_F u', v +_G v') \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (u,v) := (\lambda \cdot_F u, \lambda \cdot_G v).$$

a. On admet que $(F \times G, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel (le vérifier mentalement). Quel est son vecteur nul ?

b. On suppose que F et G sont de dimensions finies. Montrer que $F \times G$ est de dimension finie et que $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie, et soient F et G des s.e.v. de E. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f\colon F \times G &\longrightarrow E \\ (u,v) &\longmapsto u + v. \end{aligned}$$

a. Vérifier que f est linéaire.

b. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

c. Montrer que $\ker f$ est isomorphe à $F \cap G$.

d. Appliquer le théorème du rang et en déduire la formule de Grassmann.

Exercice 82*. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f\circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, où $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur associe le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
2. Montrer que $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ ou [$\dim(\ker f) = 2$ et $\operatorname{rg}(f) = 1$].
3. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ et une forme linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \varphi(x)\,u$.

Exercice 83*. Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et soient f et g des endomorphismes de E tels que $f\circ g = g\circ f$.

Définition. *On dit qu'un s.e.v. F de E est stable par un endomorphisme f si $f(F) \subset F$.*

Démontrer que $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.